1. (8 točk) Naj bosta vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ pravokotna. Pokažite, da je $\|\vec{a}\| \leq \|\vec{a}+\vec{b}\|$.

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^T(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^T\vec{a} + \underbrace{\vec{b}^T\vec{a}}_{=0} + \underbrace{\vec{a}^T\vec{b}}_{=0} + \vec{b}^T\vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \geq \|\vec{a}\|^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\| \geq \|\vec{a}\|$$

(Ali pa s Pitagorovim izrekom.)

2. (12 točk) Naj bo $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, za katero velja

$$\tau\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \text{ in } \tau\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

(*) Seveda je prav tudi, če ste najprej izpeljali B. del in iz njega A.

A. (4 točk) Izračunajte $\tau\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.

ČE A. IN B. DEL BREZ UTEMELJITVE A PRAV, JE SKUPAJ 4 TOČKE

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{linearnost}$$

$$\tau\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \tau\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) - \tau\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

B. (8 točk) Zapišite matriko, ki pripada τ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

4 točke, če 3×2 in 2. stolpec kar nekaj

8 točk (vse), če 3×2 in 2. stolpec iz naloge (A)

3. (8 točk) Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Koliko rešitev $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba

$$B^{-1}(I_n + AX)B = B + I_n?$$

$$\underbrace{B^{-1}I_nB}_{=I_n} + B^{-1}AXB = B + I_n$$

$$B^{-1}AXB = B \quad /B^{-1}$$

$$B\backslash \quad AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

Brez poenostavitve je bila to načeloma najpogostejša rešitev

$$A^{-1}(B(B+I_n)B^{-1} - I_n)$$

$\Rightarrow$ ena rešitev

(4 točke brez sklepa, 4 točke za napačno izpeljavo + [illegible])

4. (8 točk) Ali je množica vseh 3×3 matrik, katerih vsota diagonalnih elementov je 0, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$? DA

$$\mathcal{A} = \{ [a_{ij}] ; a_{33} = -a_{22} - a_{11} \}$$

$$[\alpha A + \beta B]_{33} = \alpha a_{33} + \beta b_{33} =$$
$$= \alpha(-a_{22} - a_{11}) + \beta(-b_{22} - b_{11}) =$$
$$= (-\alpha a_{22} - \beta b_{22}) + (-\alpha a_{11} - \beta b_{11})$$

(Ali pa po komponentah, kar ste večinoma naredili.)

+

5. (12 točk) Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 + x^3$. Naj bo $\vec{v} = [1, 1, 0, 0]^{\mathsf{T}}$ lastni vektor matrike A pri neničelni lastni vrednosti $\lambda \neq 0$.

A. (4 točk) Določite λ.

$$\Delta_A = x^4 + x^3 = x^3(x+1)$$
$$\boxed{\lambda = -1}$$
$$\lambda_{2,3,4} = 0$$

B. (8 točk) Zapišite vsaj dva lastna vektorja $\vec{w}_1$ in $\vec{w}_2$ matrike A pri lastni vrednosti 0.

$\vec{w}_1 \perp \vec{v}$, $\vec{w}_2 \perp \vec{v}$

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NENIČELNA!

poljubna vektorja, ki $\perp \vec{v}$

+

6. (8 točk) Katere od naslednjih trditev so pravilne za vsako obrnljivo matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

A. $\operatorname{rang}(A^2) = n$

B. $\det(A^2) = 2\det(A)$

C. $\det(2A) = 2\det(A)$

D. $\dim(N(A)) = n$

E. $\det(A^{-1})\det(A) = 1$

F. $A + A^{\mathsf{T}}$ je simetrična matrika

G. A in A^2 imata enake lastne vrednosti

H. A in A^2 imata enake lastne vektorje

(Obkrožite vse pravilne odgovore. Če boste obkrožili **vse** pravilne odgovore, a nobenega napačnega, boste dobili 8 točk. Če boste obkrožili vsaj polovico pravilnih odgovorov, a nobenega napačnega, boste dobili 4 točk. V nasprotnem primeru pa 0 točk. Pri tej nalogi odgovora ni potrebno utemeljevati.)

4 OK → 8 točk
3 OK → 6 točk
2 OK → 4 točke

4 OK 1 X → 4 točke
3 OK 1 X → 2 točki