Prvi izpit iz Linearne algebre
Teoretični del
13. junij 2024

Vsa vprašanja so enakovredna. Vsako je vredno 1 točko. Za reševanje imate 45 minut. Obkrožite pravilni odgovor in ga **utemeljite**. Za nepravilen odgovor dobite 0 točk, za utemeljitev pravilnega odgovora pa lahko dobite 0 ali 1/4 ali 1/2 ali 3/4 ali 1 točko. Če je utemeljitev povsem napačna, tudi pravilen odgovor ne prinaša točk.

1. Obstajajo taka realna števila a, b, c, d, e, da je naslednja matrika ortogonalna:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ c & d & e \end{pmatrix}.$$

   DA / NE *Utemeljitev:*

2. Stolpci obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$.

   DA / NE *Utemeljitev:*

3. Realna matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima same realne lastne vrednosti.

   DA / NE *Utemeljitev:*

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taka realna matrika, da ima A^2 lastno vrednost $1 + 2i$. Potem je $\det A$ kompleksno število, ki ni realno.

   DA / NE *Utemeljitev:*

5. Naj bo $m < n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrika in A^+ njen Moore–Penroseov inverz. Velja $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^+$.

   DA / NE *Utemeljitev:*

6. Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, ki ima neko lastno vrednost $\lambda \neq 0$, A^{10} pa je matrika samih 0.

   DA / NE *Utemeljitev:*

7. Naj bo $n > m$. Obstajata taki matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, da je matrika AB obrnljiva.

   DA / NE *Utemeljitev:*

8. Naj bo $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ injektivna linearna preslikava med vektorskima prostoroma $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Naj bodo $v_1, \ldots, v_k$ linearno neodvisni v $\mathbb{R}^m$. Potem so $L(v_1), \ldots, L(v_k)$ linearno neodvisni v $\mathbb{R}^n$.

   DA / NE *Utemeljitev:*

9. Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$, $\cdot$ običajni skalarni produkt in $z, w \in V$ fiksna vektorja. Če za vsak $v \in V$ velja $z \cdot v = w \cdot v$, potem je $z = w$.

   DA / NE *Utemeljitev:*

10. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ naravno število, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrični matriki, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ realna matrika in

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

bločna matrika. Obstaja ortonormirana baza za $\mathbb{R}^{2n}$, ki jo sestavljajo lastni vektorji matrike M.

DA / NE *Utemeljitev:*