Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

2. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL
28. junij 2023

(Na teoretičnem delu je 7 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk. **Vse odgovore dobro utemeljite!**)

1. (10 točk) Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna enotska vektorja. Izračunajte prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$ ter $\vec{a}\times\vec{b}$.

2. (10 točk) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{61\times 17}$ rang enak 11. Največ koliko linearno neodvisnih vektorjev $\vec{x}$ zadošča enačbi $A\vec{x} = \vec{0}$?

3. (10 točk) Pokažite, da vsaka linearna preslikava $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slika linearno odvisne vektorje v linearno odvisne.

4. (10 točk) Pokažite, da je matrika

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

ortogonalna za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$.

5. (20 točk) Naj bo $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ matrika z lastnimi vrednostmi -3, -2, -1 in 1. Določite:

A. $\det(B^2)$

B. $\operatorname{rang}(B - 2I)$

C. lastne vrednosti B^{-1}

D. število ničelnih singularnih vrednosti matrike B

6. (20 točk) Simetrična matrika C naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_C(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$.

A. Izračunajte $\dim N(C + I)$.

B. Naj bo $\vec{v} = [1, 0, 0, 1]^\top \in N(C)$. Zapišite vsaj en lastni vektor $\vec{w}$ pri neničelni lastni vrednosti matrike C.

C. Ali je matrika C diagonalizabilna?

D. Določite singularne vrednosti matrike C.

7. (20 točk) Katere od naslednjih trditev so resnične za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$?

A. Če je $m < n$, je sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ vedno rešljiv.

B. Če je $m > n$, sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.

C. Sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ ima vedno neničelno rešitev.

D. Sistem $A^\top A\vec{x} = A^\top\vec{b}$ je vedno rešljiv.

E. Linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ je rešljiv natanko tedaj, ko je A kvadratna in obrnljiva.

F. Če ima linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ neskončno rešitev, potem je $m > n$.

G. Če je $\vec{b} \in C(A)$, potem ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ neskončno rešitev.

H. Linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima rešitev natanko tedaj, ko je $\vec{b} \in N(A)$.

I. Linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ ima rešitev natanko tedaj, ko je $\vec{b} \perp N(A^\top)$.

J. Če je $m > n$, je vektor $\vec{x}$, ki je najbližji rešitvi sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ dobljeni po metodi najmanjših kvadratov, tisti, ki je najbližji vektorju $\vec{b}$.

K. Če je $m > n$, je vektor $\vec{x}$, ki je najbližji rešitvi sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ dobljeni po metodi najmanjših kvadratov, tisti, ki reši sistem $A^\top A\vec{x} = A^\top\vec{b}$.

L. Če je $m > n$ in $\vec{b} \in C(A)$, potem je vektor $\vec{x}$, ki je najbližji rešitvi sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ dobljeni po metodi najmanjših kvadratov, tudi rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

M. Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika, potem ima sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ vedno netrivialno rešitev.

N. Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika, potem ima sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ vedno natanko eno rešitev.

(Obkrožite vse pravilne odgovore. Za vsak napačno obkrožen odgovor boste dobili -2 točki. Pri tej nalogi odgovorov ni potrebno utemeljevati.)