Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

3. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL
6. september 2022

(Na teoretičnem delu je 8 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (10 točk) Točka $T(a,b,3)$ leži na premici, ki gre skozi točko $P(4,5,6)$ in je pravokotna na ravnino $y-3z=0$. Določite a in b.

2. (20 točk) Naj bodo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^7$ linearno neodvisni vektorji. Za matriko $A\in\mathbb{R}^{7\times 5}$ naj velja $C(A)=\mathcal{L}\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ in označimo s $5,4,3,\sigma_4,\sigma_5$ njene singularne vrednosti.

   A. Izračunajte $\dim N(A)$.

   B. Izračunajte $\dim N(A^{\mathsf{T}})$.

   C. Izračunajte σ_4 in σ_5.

   D. Izračunajte singularne vrednosti matrike AA^{T}.

3. (10 točk) Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \text{ ter } B = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Če je $\det A = 3$, izračunajte

A. $\det(A - B)$.

B. $\det(A^{-1}B)$.

4. (10 točk) Naj za matriko $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ velja $\operatorname{rang}(A) = 4$ in naj bosta $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ in $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ takšna vektorja, da je $A\vec{v} = A\vec{w}$. Pokažite, da tedaj velja $\vec{v} = \vec{w}$.

5. (10 točk) Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ matrika, katere stolpci so ortonormirana baza stolpčnega prostora $C(Q)$. Pokažite, da za vsak vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ velja $\|Q\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.

6. (10 točk) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, za katero velja

$$\tau(\vec{i}) = \vec{j},\ \tau(2\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \ \text{in} \ \ \tau(\vec{i} + \vec{k}) = 4\vec{j}.$$

Zapišite matriko, ki pripada τ v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

7. (10 točk) Naj bo A 3×3 simetrična matrika in $\vec{u} \in N(A)$. Naj bosta vektorja $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ in $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ lastna vektorja pri lastni vrednosti -1. Določite $A^{2022}(3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w})$.

8. (20 točk) Naj bo $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lastni vektor matrike $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

   A. Poiščite enačbo, ki ji morajo zadoščati števila a, b in c, da bo $\vec{v}$ lastni vektor matrike A.

   B. Določite obe lastni vrednosti matrike A.