Ime in priimek: ____________________ Vpisna številka: ________________

2. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL

13. junij 2022

(Na teoretičnem delu je 9 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (10 točk) Naj za neničelna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ velja $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| = \vec{a} \cdot \vec{b}$. Pokažite, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.

$\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| = \vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\varphi$

$\underbrace{\|\vec{a}\|}_{\neq 0}\underbrace{\|\vec{b}\|}_{\neq 0}(1-\cos\varphi) = 0$ saj $\vec{a}, \vec{b}$ neničelna

$\cos\varphi = 1$

$\varphi = 2k\pi \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ kolinearna

2. (10 točk) Zapišite primer matrike $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ brez ničelnih vrstic in vektorja $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$, za katera ima linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ enolično rešitev.

→ ima rešitev $\Leftrightarrow \vec{b} \in C(A)$

→ rang $A = 3$

Recimo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(lahko tudi $\vec{b} = \vec{0}$)

3. (10 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 7}$ matrika ranga 3. Izračunajte (z utemeljitvijo):

A. $\dim N(A)$

$\dim N(A) = 7 - \dim C(A) =$
$= 7 - \text{rang}(A) =$
$= 7 - 3 = 4$

B. $\dim N(A)^\perp$

$N(A) \subseteq \mathbb{R}^7$

$\dim N(A)^\perp = 7 - \dim N(A) =$
$= 7 - 4 = 3$

(ali pa:
$\dim N(A)^\perp = \dim C(A^T) =$
$= \text{rang}(A^T) =$
$= \text{rang}(A) = 3$)

4. (10 točk) Naj bo $\vec{a} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$. Ali je množica

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a}^{\mathsf{T}}\vec{x} = \underbrace{\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{b}}_{=\vec{b}^{\mathsf{T}}\vec{x}}\}$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$?

(Ne potrebujemo konkretnih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.)

$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 ; \underbrace{\vec{a}^{\mathsf{T}}\vec{x} = \vec{b}^{\mathsf{T}}\vec{x}}_{(\vec{a}^{\mathsf{T}} - \vec{b}^{\mathsf{T}})\vec{x} = 0}\} = \left(\mathcal{L}(\vec{a}^{\mathsf{T}} - \vec{b}^{\mathsf{T}})\right)^{\perp}$

Ortog. komplement je vektorski podprostor.

Seveda pa lahko tudi po definiciji

(ali pa: $U = N(\underbrace{\vec{a}^{\mathsf{T}} - \vec{b}^{\mathsf{T}}}_{\text{matrika z eno vrstico}})$, kar je tudi vekt. podpr.)

5. (10 točk) Naj za matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja $A^2 = A$. Določite vse možnosti za vrednost $\det(A)$.

$A^2 = A$

$\det(A^2) = \det(A)$

$(\det A) \cdot (\det A) = \det(A)$

$(\det A)(\det A - 1) = 0$

$\Rightarrow \det A = 0$ ali $\det A = 1$

6. (10 točk) Naj bo $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, podana s predpisom

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x + y \\ z \\ z \end{bmatrix}.$$

Zapišite matriko, ki pripada τ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

$\tau(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tau(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tau(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A_{\tau, \mathcal{S}, \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (10 točk) Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ enotski vektorji v $\mathbb{R}^5$ in naj velja $\vec{a} \perp \vec{b}$ in $\vec{a} \perp \vec{c}$. Zapišite projekcijo vektorja $\vec{c}$ na linearno ogrinjačo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{L}\{\vec{a},\vec{b}\}}\vec{c} = \underbrace{(\vec{c}^T\vec{a})}_{0,\text{ saj } \vec{a}\perp\vec{c}}\vec{a} + (\vec{c}^T\vec{b})\vec{b} = (\vec{c}^T\vec{b})\vec{b}$$

Ker $\{\vec{a},\vec{b}\}$ ONB za $\mathcal{L}\{\vec{a},\vec{b}\}$.

8. (20 točk) Naj bo A 3×3 matrika, katere rang je enak 2. Naj bosta vektorja $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ in $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ lastna vektorja pri lastni vrednosti 1. Naj bo tudi $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ lastni vektor matrike A.

$\vec{w}$ je l. vektor pri l. vr. 0

A. Določite $N(A)$.

rang $(A) = 2 \Rightarrow 0$ je (enkratna) l. vrednost

$\Rightarrow N(A) = \mathcal{L}(\vec{w}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}; z \in \mathbb{R} \right\}$

B. Določite $A^{2022}(\vec{u} + 3\vec{v} + 5\vec{w})$.

linearnost

$A^{2022}(\vec{u}+3\vec{v}+5\vec{w}) =$

$= A^{2022}\vec{u} + 3A^{2022}\vec{v} + 5A^{2022}\vec{w} = \longrightarrow$

$A\vec{u} = \vec{u}$, $A^{2022}\vec{u} = \vec{u}$; $A\vec{v} = \vec{v}$, $A^{2022}\vec{v} = \vec{v}$; $A\vec{w} = \vec{0}$, $A^{2022}\vec{w} = \vec{0}$

$\longrightarrow = \vec{u} + 3\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

9. (10 točk) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ le dve različni lastni vrednosti, ki sta realni, in naj velja $\mathrm{rang}(A - 2I) = 1$. Ali je matrika A diagonalizabilna?

rang $(A-2I) = 1 \Rightarrow \dim N(A-2I) = 3$

$\Rightarrow 2$ je vsaj $3\times$ l. vrednost

Ker ima 4×4 matrika A dve različni l. vrednosti,

lastni vrednosti $A \longrightarrow$ $\boxed{2 \text{ (veckr. 3)}}$ $\wedge$ $\boxed{3}$ lin. neodv. l. vektorji

$\hookrightarrow \lambda$ (veckr. 1)

A je diagonalizabilna