Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

# (PRED)IZPIT, LINEARNA ALGEBRA TEORETIČNI DEL

## 31. maj 2021

(Na teoretičnem delu je 6 nalog, ki so skupaj vredne 56 točk. Za 100% je potrebno doseči 50 točk.)

1. (16 točk) Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^5$ linearno neodvisna vektorja, za matriko $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ pa naj velja $N(A) = \mathcal{L}\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Izračunajte

   $\operatorname{rang}(A^\mathsf{T}) = \underline{\quad 3 \quad}$ $\qquad$ $\dim N(A^\mathsf{T}) = \underline{\quad 1 \quad}$

   $\dim C(A)^\perp = \underline{\quad 1 \quad}$ $\qquad$ $\dim N(A)^\perp = \underline{\quad 3 \quad}$

   Do pravilne rešitve ste lahko prišli po različnih poteh. Denimo: Ker sta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^5$ linearno neodvisna vektorja, je $\dim N(A) = 2$. Zato

   $$\operatorname{rang}(A^\mathsf{T}) = \operatorname{rang}(A) = 5 - \dim N(A) = 5 - 2 = 3$$

   in

   $$\dim N(A)^\perp = \dim C(A^\mathsf{T}) = \operatorname{rang}(A^\mathsf{T}) = 3.$$

   Iz tega sledi, da je

   $$\dim N(A^\mathsf{T}) = 4 - \dim C(A^\mathsf{T}) = 4 - \operatorname{rang}(A^\mathsf{T}) = 4 - 3 = 1$$

   in

   $$\dim C(A)^\perp = \dim N(A^\mathsf{T}) = 1.$$

   (Točkovanje: Vsaka utemeljena in pravilno izračunana dimenzija je vredna 4 točke.)

2. (8 točk) Naj bo

   $$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{bmatrix} \ \text{ ter } C = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

   Če je $\det A = 3$, izračunajte $\det(BC)$.

   Najpogosteje ste do rešitve prišli v treh korakih:

   1. Če drugi vrstici matrike $B$ odštejemo tretjo vrstico, se njena determinanta ne spremeni, zato je $\det B = \det A = 3$.
   2. Če iz prve vrstice matrike $C$ izpostavimo večkratnik 2, se njena determinanta pomnoži z 2, zato je $\det C = 2 \det A = 6$.
   3. $\det(BC) = \det B \cdot \det C = 18$.

   (Točkovanje: V kolikor ste utemeljili in pravilno izračunali 2 od zgornjih treh alinej, ste dobili 4 točke. Seveda ste do rešitve lahko prišli tudi z računanjem $3 \times 3$ determinant.)

3. (8 točk) Zapišite primer netrivialnega vektorskega prostora $U$ v $\mathbb{R}^3$ ter njegovega ortogonalnega komplementa $U^\perp$, pri čemer naj $U$ vsebuje vektor $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Najpogostejše rešitve:

1. $U = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ (premica skozi izhodišče in s smernim koeficientom $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$) ter $U^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ (ravnina $x+y+z=0$ skozi izhodišče z normalo $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$).
2. $U = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{a}\right\}$ ter $U^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \times \vec{a}\right\}$, kjer ste si vektor $\vec{a}$ poljubno izbrali.
3. $U$ je ravnina $2x-y-z=0$ ter $U^\perp = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ nanjo pravokotna premica (seveda je ta primer eden od podprimerov iz točke 2.).

(Točkovanje: V kolikor ste napisali le primer vektorskega prostora $U$, ste prejeli 4 točke. Posebej bi vas opozorila na to, da vsak vektorski prostor vsebuje neskončno točk in ne le svoje baze. Tako $\{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\}$ ni vektorski prostor, ampak je zgolj baza prostora $\mathcal{L}\{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\}$.)

4. (8 točk) Zapišite primer nesimetrične matrike $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, za katero velja

$$\dim N(A+2I) = 2, \operatorname{rang}(A-3I) = \operatorname{rang}(A-I) = 4 \text{ in } \det(A) = 24.$$

Iz pogojev naloge lahko razberete, da je

1. $-2$ (vsaj) dvakratna lastna vrednost matrike $A$,
2. 1 in 3 nista lastni vrednosti $A$,
3. produkt lastnih vrednosti je 24.

Najpogosteje ste tako izbrali lastne vrednosti $-2$, $-2$, $-1$ ter $-6$ in iz njih sestavili zgornje trikotno (a ne diagonalno) matriko, kot denimo

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{bmatrix}$$

(Točkovanje: Če niste napisali trikotne matrike, iz katere so jasno razvidne lastne vrednosti, ste morali posebej izračunati prave lastne vrednosti. Prav tako, če ste izbrali $-2$ za trikratno lastno vrednost, ste morali preveriti, da je $\dim N(A+2I) = 2$.
V kolikor ste zapisali matriko, ki je zadoščala vsem, razen enemu pogoju naloge (recimo nesimetričnosti ali pa determinanti 24), ste prejeli 4 točke.)

5. (8 točk) Naj bo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ obrnljiva linearna preslikava, ter vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ linearno neodvisni. Pokažite, da so tudi $\varphi(\vec{a}), \varphi(\vec{b})$ in $\varphi(\vec{c})$ linearno neodvisni vektorji.

Najprej predpostavimo, da je neka linearna kombinacija vektorjev $\varphi(\vec{a}), \varphi(\vec{b})$ in $\varphi(\vec{c})$ enaka $\vec{0}$, torej recimo, da velja

$$\alpha\varphi(\vec{a}) + \beta\varphi(\vec{b}) + \gamma\varphi(\vec{c}) = \vec{0}.$$

Ker je $\varphi$ linearna preslikava, sledi

$$\varphi(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \vec{0}.$$

Ker je $\varphi$ bijektivna preslikava, je njeno jedro trivialno, zato je

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

Ker so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni, sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$, in s tem smo pokazali, da so tudi $\varphi(\vec{a})$, $\varphi(\vec{b})$ in $\varphi(\vec{c})$ linearno neodvisni vektorji.
(Točkovanje: Tukaj ste morali biti natančni pri sklepanju. Vsak pravilen sklep je prinesel vse točke. Vsak delno pravilen pa 4 točke. Če ste iz $\alpha = \beta = \gamma = 0$ pokazali, da je tudi $\alpha\varphi(\vec{a}) + \beta\varphi(\vec{b}) + \gamma\varphi(\vec{c}) = \vec{0}$, s tem niste pokazali ničesar, zato niste prejeli točk.)

6. (8 točk) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva, potem zagotovo velja

A. $\boxed{C(A) = \mathbb{R}^n}$

B. $\boxed{\operatorname{rang}(A) = n}$

C. $\boxed{A^5 \text{ je obrnljiva}}$

D. $\det A$ je pozitivno število

E. $A$ ima le pozitivne lastne vrednosti

F. 0 je lastna vrednost matrike $A$

G. $\boxed{0 \text{ ni singularna vrednost matrike } A}$

H. Stolpci matrike $A$ so paroma pravokotni.

Malo sem prilagodila točkovanje:

- Štirje pravilni in nič napačnih odgovorov: 8 točk.
- Trije pravilni in nič napačnih odgovorov: 6 točk.
- Dva pravilna in nič napačnih odgovorov: 4 točke.
- Štirje pravilni in en napačen odgovor: 4 točke.
- Trije pravilni in en napačen odgovor: 2 točki.
- Sicer 0 točk.