Ime in priimek: Polona Vpisna številka: ____________

# 3. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL
## 5. september 2023

(Na teoretičnem delu je 6 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (20 točk) Kot običajno, označimo s $\cdot$ skalarni produkt vektorjev, ter s $\times$ vektorski produkt vektorjev. Ali za poljubne vektorje $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ veljajo naslednje lastnosti?

   - Če da, obkrožite DA, ni pa potrebno trditve dokazovati v desnem stolpcu. Pustite prazno.
   - Če ne, obkrožite NE in v desni stolpec zapišite primer vektorjev, za katere lastnosti ne veljajo.

| | Ali trditev drži? | Protiprimer, če je odgovor "NE" |
|---|---|---|
| 5 Če je $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$, potem sledi $\vec{v} = \vec{w}$. | DA<br>NE | $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{w}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$<br>ali pa<br>$\vec{u}=\vec{i}$, $\vec{v}=\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{k}$ |
| 5 Če je $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{u}\times\vec{w}$, potem sledi $\vec{v} = \vec{w}$. | DA<br>NE | $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{w}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ |
| 5 $\underbrace{\underbrace{(\vec{u}\times\vec{v})}_{\perp\vec{u}}\cdot\vec{u}}_{\vec{0}\text{ za vsak }\vec{v}} = \overbrace{\overbrace{(\vec{u}\times\vec{w})}^{\perp\vec{u}}\cdot\vec{u}}^{\vec{0}\text{ za vsak }\vec{w}}$ | DA<br>NE | |
| 5 $\left(\vec{u} - \underbrace{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\Vert\vec{v}\Vert^2}\vec{v}}_{\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}}\right) \perp \vec{v}$ | DA<br>NE | |

2. (20 točk) Naj za matriko $A \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ velja $\text{rang}(A) = 3$.

   A. Zapišite primer takšne matrike $A$ in takšnega neničelnega vektorja $\vec{b} \in \mathbb{R}^6$, za katerega linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

rang $A = 3$ $\qquad$ $\vec{b} \notin C(A)$

   B. Naj bosta $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ in $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ takšna vektorja, da je $A\vec{u} = A\vec{v}$. Pokažite, da tedaj velja $\vec{u} = \vec{v}$.

$$A\vec{u} = A\vec{v} \Rightarrow A(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in N(A)$$
$$\text{rang}\,A = 3 \Rightarrow \dim N(A) = 3 - 3 = 0$$
$$\Rightarrow N(A) = \{\vec{0}\}$$
$$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

3. (10 točk) Ali je vsaka kvadratna NENIČELNA! zgornje trikotna matrika obrnljiva? Če je, dokažite. Če ne, zapišite protiprimer.

NE!
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. (10 točk) Ali obstaja takšno pozitivno realno število $\alpha$, da bo za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ veljalo

$$\det(-3A^\top A^{-1}(AA^\top)^3) = \alpha \det(A)^6?$$

Če da, ga določite. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

$\det(-3A^T A^{-1}(AA^T)^3) = \det(-3I_4 A^T A^{-1} AA^T AA^T AA^T) =$

$= \det(-3I_4) \det(A^T)^4 (\det A)^3 (\det A^{-1}) =$

$= 81 (\det A)^4 (\det A)^3 (\det A)^{-1} =$

$= 81 (\det A)^6$ $\qquad$ DA

$\Rightarrow \alpha = 81 > 0$

5. (20 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{6\times6}$ matrika, za katero velja $A^4 = 0$.

A. Zapišite primer takšne neničelne matrike.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix}$$

B. Pokažite, da je edina lastna vrednost matrike $A$ enaka 0.

Naj bo $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ za nek $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Potem je $\underbrace{A^4\vec{v}}_{=0\vec{v}=\vec{0}} = \lambda^4\vec{v}$. Ker je $\vec{v} \neq \vec{0}$, mora biti $\lambda^4 = 0$ in zato $\lambda = 0$.

6. (20 točk) Katere od naslednjih trditev so resnične za poljubno $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$?

A. Če je $\operatorname{rang}(A) = 3$, potem je $\dim N(A^\top) = 3$.

B. Če je $\operatorname{rang}(A) = 3$, potem ima $A$ vsaj eno lastno vrednost enako 3.

C. Če je $\det(A) = 0$, potem je $A$ diagonalizabilna.

D. Če je $\det(A) = 0$, potem so vse lastne vrednosti $A$ realne.

E. Če je $A$ simetrična, so njene singularne vrednosti enake njenim lastnim vrednostim.

F. Če so lastne vrednosti matrike $A$ enake 1, 2, 3, 4 in 5, potem ima $\mathbb{R}^5$ ortonormirano bazo sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike $A$.

G. Če so lastne vrednosti matrike $A$ enake 1, 2, 3, 4 in 5, potem je $\operatorname{rang}(A - 5I) = 1$.

H. Če so lastne vrednosti matrike $A$ enake 1, 2, 3, 4 in 5, potem je $\operatorname{rang}(A + 5I) = 1$.

I. Če so lastne vrednosti matrike $A$ enake 1, 2, 3, 4 in 5, potem je $\det(A^{-1}A^\top) = 1$.

J. Če so lastne vrednosti matrike $A$ enake $-3, -2, -1, 2$ in 3, potem je $\det(A^{2023}) > 0$.

K. Če so lastne vrednosti matrike $A$ enake $-1, -1, 0, 1$ in 1, potem $A + 2I$ ni obrnljiva matrika.

L. Če je $A$ simetrična matrika in so njene lastne vrednosti enake $-1, -1, 0, 1$ in 1, potem ima $\mathbb{R}^5$ ortonormirano bazo sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike $A$.

M. Če so lastne vrednosti matrike $A$ enake $-1, -1, 0, 1$ in 1, potem je matrika $AA^\top$ obrnljiva.

N. Če so lastne vrednosti matrike $A$ enake $-1, -1, 0, 1$ in 1, potem ima $A$ štiri neničelne singularne vrednosti.

(Obkrožite vse pravilne odgovore. Za vsak napačno obkrožen odgovor boste dobili -2 točki. Pri tej nalogi odgovorov ni potrebno utemeljevati.)