Vpisna številka:______________ Ime in priimek:__________________________________

TEORETIČNI IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

3. julij 2017

(1) Na naslednja vprašanja odgovori z DA ali NE (če je trditev pravilna, na kratko utemelji zakaj, če je napačna, zapiši protiprimer).

(a) Vse matrike ranga 1 tvorijo vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Vse matrike velikosti $n \times n$, z ničelnim elementom na mestu $(1, 1)$, tvorijo vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(c) Če za kvadratni matriki A in B velja, da je $ABA = 0$, potem je tudi $BAB = 0$.

(d) Če je matrika AB obrnljiva, potem sta obrnljivi tudi matriki A in B.

(e) Za kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $\det(AB) = \det(BA)$.

(f) Za kvadratno matriko A velja $\det(AA^T) = (\det(A))^2$.

(g) Predpis $\langle u, v\rangle = u_1v_2 + u_2v_1$ (za vektorja $u = (u_1, u_2)^T$ in $v = (v_1, v_2)^T$) tvori skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

(h) Kvadratna matrika A velikosti n je obrnljiva natanko tedaj, ko je $AB \neq 0$ za vsako neničelno kvadratno matriko B velikosti n.

(2) (a) Kolikšna je razsežnost vektorskega prostora, ki ga napenjajo vektorji $x, x+1, x^2+x$ v prostoru polinomov stopnje največ 5?

(b) Kolikšna je razsežnost realnega vektorskega prostora, ki ga tvorijo vse matrike velikosti $n \times n$?

(c) Dana je kvadratna matrika A, za katero veš, da ni obrnljiva. Izračunaj $\det(A^{2017})$.

(d) Kolikšna je razsežnost vektorskega podprostora, ki ga napenjata dve nevzporedni premici skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$? Kolikšna je razsežnost komplementa tega prostora?

(e) Za matriko A velikosti 3×3 velja $A^3 = 2A^2 - I$. Izračunaj A^{-1}.

(f) Dana je matrika A, katere lastne vrednosti so $0, 1$ in -1. Izračunaj A^{2017}, če veš, da se matrika A da diagonalizirati.

(g) Karakteristični polinom matrike A je $p(x) = x^3 + 2x + x$. Ali je matrika A obrnljiva?

(h) Matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ima lastni vrednosti 1 in 2, rang matrike $A - I$ pa je enak 1. Ali se matrika A da diagonalizirati?

(3) Katere od naslednjih matrik se dajo diagonalizirati:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}?$$