

SEZNAM IZPITNIH TEMATIK IZ NUMERIČNIH METOD

1. UVOD V NUMERIČNO RAČUNANJE

- (1) Kaj je strojni epsilon? Kaj je osnovna zaokrožitvena napaka?
- (2) Katere napake pri numeričnem računanju poznamo?
- (3) Katere so osnovne računske operacije v IEEE in kateri dve operaciji sta problematični s stališča numerične matematike?
- (4) Kaj je relativno direktno stabilna metoda in kaj relativno obratno stabilna metoda? Navedite primer metode, ki je relativno direktno in obratno stabilna in skicirajte dokaz. (Lahko za najmanjši možen primer.) Navedite primer metode, ki je relativno obratno, ne pa tudi direktno stabilno. (Lahko za najmanjši možen primer.)

2. REŠEVANJE LINEARNIH SISTEMOV

- (1) Zapišite splošen kvadraten sistem linearnih enačb in ga prepisite v matrično obliko. Kdaj je tak sistem rešljiv/enolično rešljiv/ni rešljiv? Koliko operacij je potrebnih za izračun produkta matrike z vektorjem? Kaj pa za produkt dveh matrik?
- (2) Kaj je Gaussova eliminacija in koliko osnovnih računskih operacij je potrebnih za njeno izvedbo?
- (3) Opišite elementarne eliminacije in razložite, kako z njihovo pomočjo uničimo elemente v danem vektorju x . Kako izračunamo inverz elementarne eliminacije in kako izračunamo produkt dveh elementarnih eliminacij?
- (4) Kaj je LU razcep matrike A (brez pivotiranja) in kako ga izračunamo? Koliko operacij je potrebnih za njegov izračun? Kdaj LU razcep brez pivotiranja obstaja? Napišite primer matrike, pri kateri se ne da izračunati LU razcepa brez pivotiranja.
- (5) Kaj je zgornjetrikoten sistem linearnih enačb? Kaj je prema in kaj obratna substitucija za zgornjetrikoten sistem? Koliko operacij zahtevata?
- (6) Kako s pomočjo LU razcepa matrike A izračunamo rešitev linearnega sistema enačb $Ax = b$? Koliko operacij zahteva?
- (7) Kaj je LU razcep matrike A z delnim pivotiranjem? Zakaj ga uvedemo? Opišite postopek za njegov izračun. Kako s pomočjo tega razcepa izračunamo rešitev linearnega sistema enačb $Ax = b$? Koliko operacij zahteva reševanje sistema $Ax = b$ prek LU razcepa z delnim pivotiranjem?
- (8) Kaj je LU razcep s kompletnim pivotiranjem in zakaj se v praksi ne uporablja?
- (9) Kaj lahko poveš o stabilnosti reševanja zgornjetrikotnega sistema prek obratne/preme substitucije?

- (10) Kaj je pivotna rast? Kaj nam pivotna rast pove? Ali je pivotna rast pri delnem pivotiranju omejena? Če da, skiciraj dokaz tega dejstva.
- (11) Kaj lahko poveš o stabilnosti računanja LU razcepa brez pivotiranja/z delnim pivotiranjem/s kompletnim pivotiranjem?
- (12) Kaj je razcep Choleskega matrike in za katere matrike se razcep izvede? Kakšna je računaska zahtevnost in kakšna je stabilnost v primerjavi z LU razcepom.
- (13) Kaj je vektorska norma? Navedite nekaj primerov vektorskih norm? Kaj je uporaba vektorskih norm v numerični matematiki?
- (14) Kaj je matrična norma? Na kakšen način vsaka vektorska norma porodi pripadajočo matrično normo? Navedite nekaj primerov matričnih norm. Kje jih uporabljamo v numerični matematiki?
- (15) Kaj je pogojenostno število matrike? Kako je pogojenostno število povezano s stabilnostjo reševanja sistemov z eno od direktnih metod?
- (16) Katere iterativne metode za reševanje linearnih sistemov poznaš? Eno od njih podrobno opiši.

3. PREDOLOČENI SISTEMI

- (1) Kaj je predoločen sistem enačb? Napišite primer. Kaj je rešitev predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov?
- (2) Zapišite predoločen sistem enačb, ki določa regresijsko premico za podatke (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, m$. Interpretirajte rešitev.
- (3) Kako izračunamo rešitev predoločenega sistema preko normalnega sistema?
- (4) Kaj je Moore-Penroseov inverz matrike in kako se z njim izraža rešitev predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov?
- (5) Kaj lahko poveste o stabilnosti rešitve predoločenega sistema?
- (6) Kaj je QR razcep matrike A in kako z njegovo pomočjo pridemo do rešitve predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov?
- (7) Kaj je klasična Gram-Schmidtova ortogonalizacija in kaj je razlika med klasično in modificirano Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo?
- (8) Kaj so Householderjeva zrcaljenja in kako s pomočjo njih izračunamo QR razcep matrike?
- (9) Kaj so Givensove rotacije in kako jih uporabimo za izračun QR razcepa matrike? Kdaj je to ugodnejše od uporabe Householderjevih zrcaljenj?

4. ISKANJE LASTNIH VREDNOSTI MATRIK

- (1) Kaj je dominantna lastna vrednost? Kako numerično iščemo dominantno lastno vrednost? Kako iščemo drugo dominantno lastno vrednost?
- (2) Kaj je inverzna iteracija in zakaj se uporablja?
- (3) Kaj je ortogonalna iteracija? katero formo matrike izračunamo z ortogonalno iteracijo in kako iz nje razberemo lastne vrednosti?
- (4) Kaj je QR -iteracija z enojnim premikom? Kaj je cilj premika?

- (5) Kako učinkovito numerično izračunamo vse lastne vrednosti matrike? Kakšna je cena?

5. REŠEVANJE NELINEARNIH ENAČB

- (1) Opišite, kako deluje bisekcija. Koliko korakov bisekcije je potrebnih, da na intervalu $[a, b]$ izračunamo ničlo funkcije f na natančnost 10^{-10} ?
- (2) Kaj je dobro vzeti za zaustavitveni kriterij bisekciji v primeru, ko je odvod funkcije na danem intervalu blizu 0? Kaj pa, ko je odvod relativno velik?
- (3) Kaj pomeni red konvergence? Kako se red konvergence pozna pri dejanski uporabi metode?
- (4) Izpeljite in opišite tangentno metodo ter določite red konvergence.
- (5) Izpeljite in opišite sekantno metodo ter določite red konvergence.
- (6) Izpeljite in opišite metodo regula-falsi.
- (7) Naj bo g iteracijska funkcija. Kaj so fiksne točke za g ? Kdaj so privlačne, kdaj odbojne?
- (8) Kako s postopkom navadne iteracije izračunamo ničle neke nelinearne funkcije f ? Kdaj je hitrost konvergence linearna, kvadratična in kdaj kubična?
- (9) Kateri iteracijski metodi za reševanje sistema nelinearnih enačb poznaš? Eno od njih opiši.
- (10) Kaj je ideja kvazi-Newtonovih metod za reševanje sistemov nelinearnih enačb? Eno od njih natančneje opiši.
- (11) Opiši povezavo med reševanjem sistemov enačb in optimizacijo.

6. POLINOMSKA INTERPOLACIJA IN APROKSIMACIJA

- (1) Zapišite sistem enačb, ki določa interpolacijski polinom skozi paroma različne točke (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$. Kakšno stopnjo polinoma moramo vzeti, če hočemo interpolirati 5 točk? Ali je reševanje tega sistema vedno stabilno?
- (2) Opišite Lagrangeovo obliko interpolacijskega polinoma in njene pomanjkljivosti.
- (3) Opišite Newtonovo obliko interpolacijskega polinoma. Kaj so to deljene difference in kako jih računamo? Kakšne so prednosti Newtonove oblike interpolacijskega polinoma v primerjavi z Lagrangeovo?
- (4) Kaj s stališča interpolacije pomenijo večkratne interpolacijske točke? Čemu so enake deljene difference $f[x_0, x_0]$, $f[x_0, x_0, x_0]$, $f[x_0, x_0, x_0, x_0]$? Zapišite interpolacijski polinom, ki se s funkcijo f ujema v točki x_0 štirikratno, to je v vrednosti in v prvih treh odvodih.
- (5) Ali višanje stopnje interpolacijskega polinoma vedno izboljša prileganje dani funkciji? Utemelji s primerom?
- (6) Kako lahko ocenimo napako interpolacijskega polinoma za funkcijo f ? Kakšna je napaka interpolacije s polinomom stopnje n .
- (7) Kaj so Gaussove kvadraturene formule za izračun integrala $\int_a^b f(x)dx$ funkcije f in kako jih učinkovito določimo?

7. NUMERIČNA INTEGRACIJA

- (1) Opišite osnovno trapezno in osnovno Simpsonovo pravilo. Kako pridemo do teh dveh pravil in kakšni sta napaki?

- (2) Opišite sestavljeno trapezno in sestavljeno Simpsonovo pravilo.
- (3) Kako je red kvadrature formule? Kako je to metoda nedoločenih koeficientov?
- (4) Kako lahko določimo pravi korak v trapeznem pravilu?
- (5) Kako deluje adaptivno trapezno pravilo?
- (6) Kaj je Rombergova metoda? Opiši osnovni princip in ga prikaži na primeru trapeznega pravila.
- (7) Kaj so vozli in kaj uteži v kvadraturem pravilu? V čem so Gaussova kvadratura pravila boljša od Newton-Cotesovih?
- (8) Kako se numerično računa dvojni integral na pravokotniku?
- (9) Kako se numerično računa večkratni integral na poljubnem območju? Kakšna je napaka? Kolikšna je računsko zahtevnost za napako ϵ ?

8. REŠEVANJE DIFERENCIALNIH ENAČB

- (1) Opišite Eulerjevo metodo za reševanje začetnega problema $y_0 = f(x, y)$ pri pogoju $y(a) = y_a$.
- (2) Opišite idejo Runge-Kutta metod za reševanje diferencialnih enačb. Koliko je napaka metode reda k ?
- (3) Kaj je adaptivna metoda za reševanje začetnega problema $y_0 = f(x, y)$ pri pogoju $y(a) = y_a$ in kaj je DOPRI5?
- (4) Opišite idejo Adams-Bashforthove metode za reševanje diferencialnih enačb. Koliko je napaka metode reda k ?
- (5) Opišite idejo Adams-Moultonove (AM) metode za reševanje diferencialnih enačb. Koliko je napaka metode reda k ? V kakšnem smislu je AM metoda implicitna metoda?
- (6) Opišite idejo ABM prediktor-korektor metode za reševanje diferencialnih enačb. Koliko je napaka metode reda k ?
- (7) Opišite idejo strelske metode za reševanje robnih problemov DE.