1. naloga (25 točk)

Na množici parov naravnih števil $A = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$ definiramo relacijo R na sledeč način:

$$(a,b)R(c,d) \quad \text{natanko tedaj} \quad c-a=d-b=k, \text{kjer } k \in \{1,-1\}.$$

$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c=a+1 \\ d=b+1 \end{array}}$ ALI $\boxed{\begin{array}{l} c=a-1 \\ d=b-1 \end{array}}$

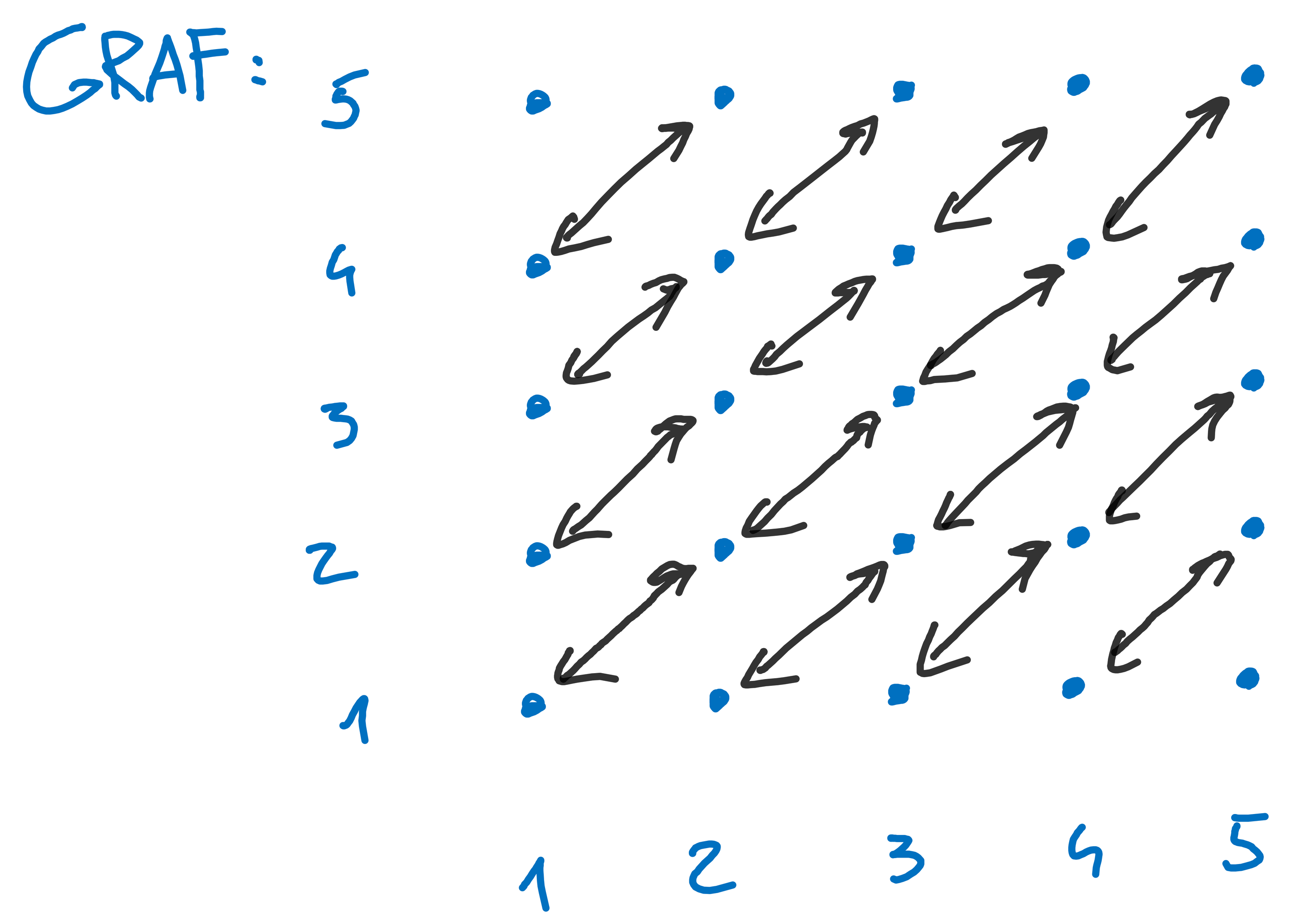
a) (5 točk) Določi vse pare $(c,d) \in A$, za katere velja $(2,3)R(c,d)$.

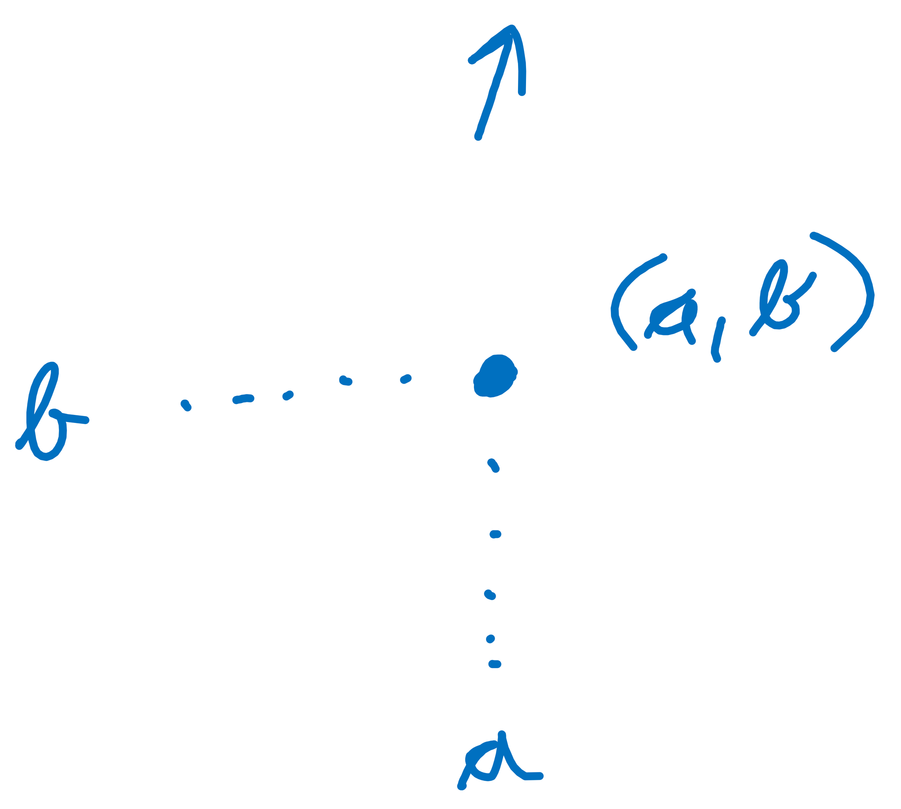
$$(c,d) \in \{(1,2), (3,4)\}$$

5

b) (10 točk) Ali je relacija R refleksivna, simetrična, tranzitivna? Kaj pa relacija R^2?

GRAF:





R: refl.: ✗ $\quad (1,1) \not R (1,1)$ $\quad$ 1

sim.: ✓ $\quad (a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$?

$\Updownarrow$

$c-a=d-b=\pm 1 \quad | \cdot (-1)$

$a-c=b-d=\mp 1$

✓ $\quad$ 2

tranz.: ✗ $\quad (1,1)R(2,2)$ in $(2,2)R(3,3)$, toda $(1,1) \not R (3,3)$ $\quad$ 2

R^2: refl.: ✗ $\quad (1,5) \not R^2 (1,5)$ $\quad$ 2

sim.: ✓ $\quad$ "ker R sim." $\quad$ 1

tranz.: ✗ $\quad (1,1)R^2(3,3)$ in $(3,3)R^2(5,5)$, toda $(1,1) \not R^2 (5,5)$ $\quad$ 2

c) **(10 točk)** Utemelji, da je relacija R^* ekvivalenčna. Opiši kvocientno množico A/R^*.

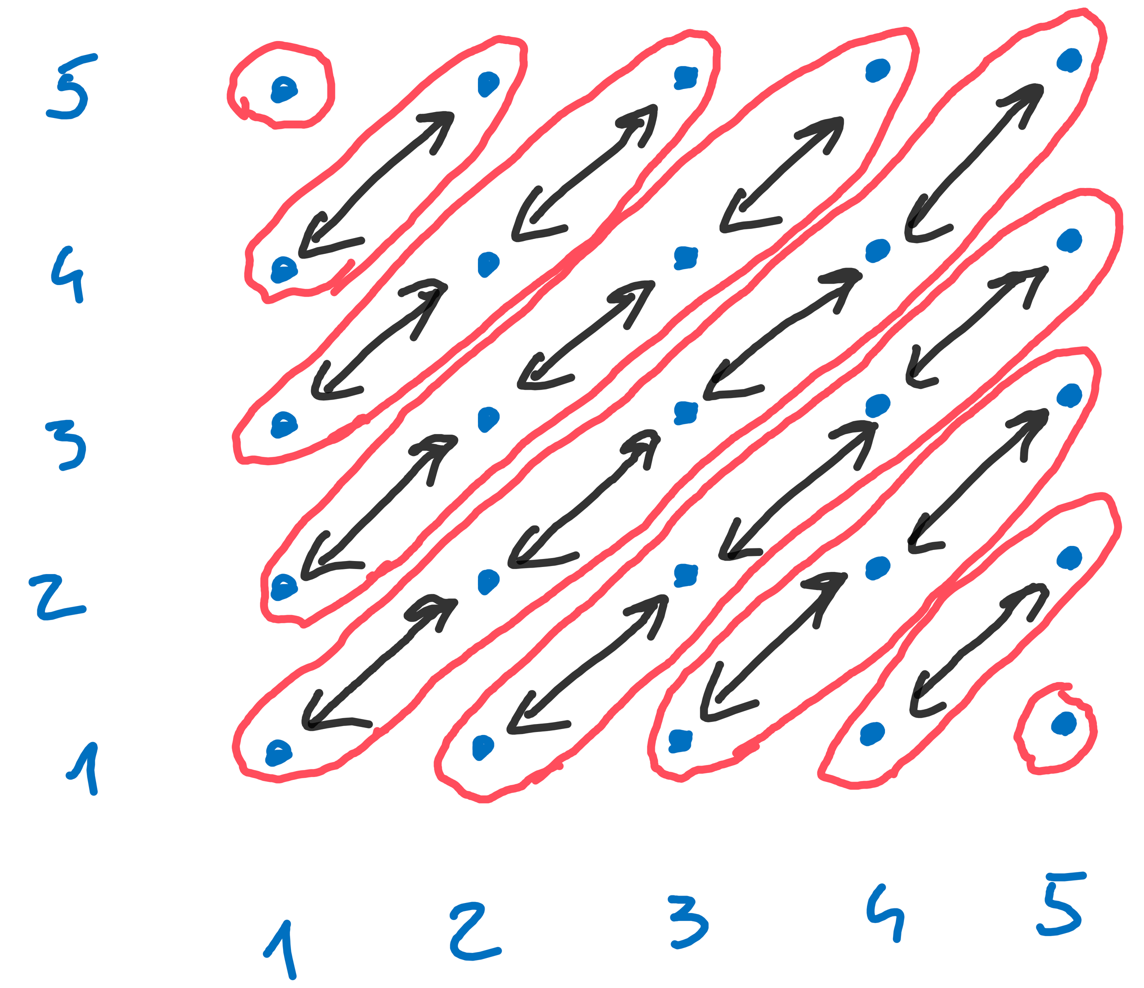
R^*: refl, tranz po definiciji ✓

sim. ker R sim ✓

3

$\Rightarrow$ ekvivalenčna

EKV. RAZREDI:



A/R^* je množica vseh naraščajočih diagonal.

7

oz.

$$A/R^* = \{ \{(1,5)\}, \{(1,4),(2,5)\}, \{(1,3),(2,4),(3,5)\}, \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\},$$
$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}, \{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4)\}, \{(3,1),(4,2),(5,3)\},$$
$$\{(4,1),(5,2)\}, \{(5,1)\} \}$$

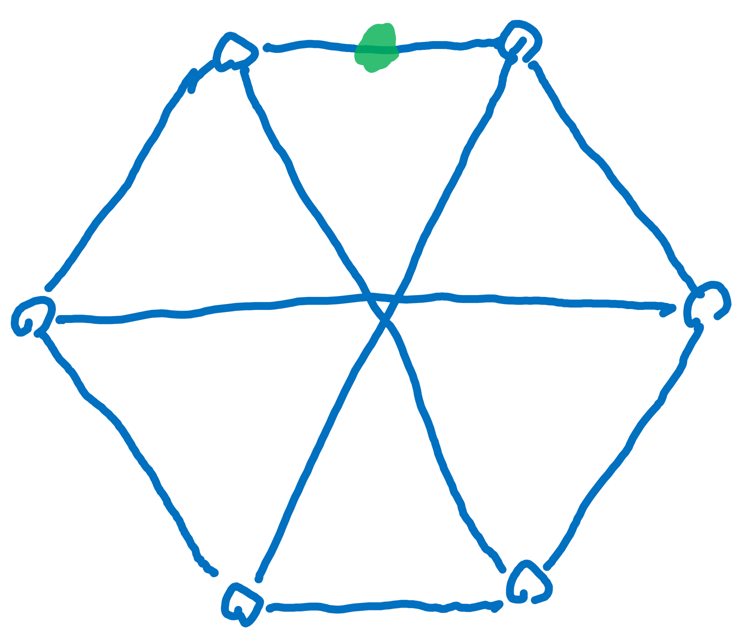
2. naloga (25 točk)

a) (5 točk) Kolikšna je dolžina najdaljšega cikla v grafih z zaporedjem stopenj točk enakim 3, 3, 3, 3, 3, 3? Zakaj?

$\underbrace{G}_{1}$, $\underbrace{\text{ker je } \delta(G) = 3 \geq \frac{6}{2}}_{3} \overset{\text{DIRAC}}{\Longrightarrow} \underbrace{G \text{ Hamiltonski}}_{1}$

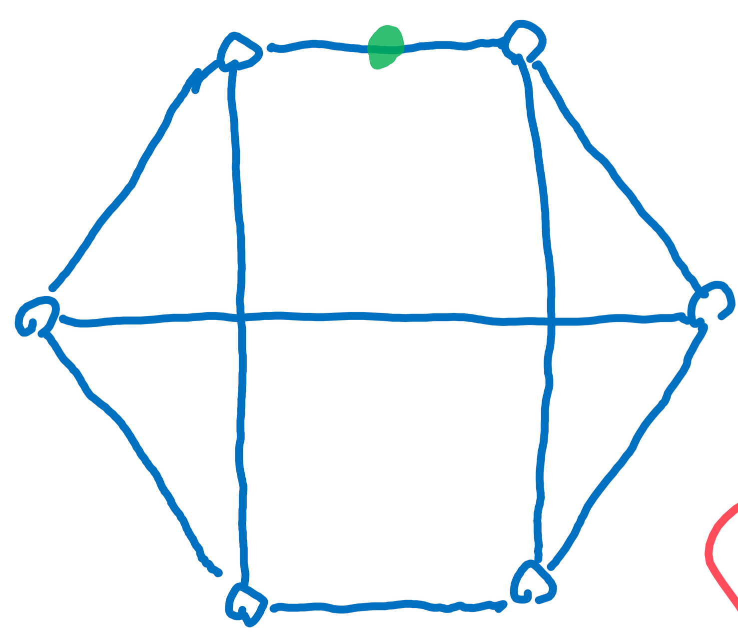
b) (20 točk) Poišči vsaj tri neizomorfne grafe s točkami stopenj 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2. Utemelji, da niso izmorfni.[1]

• VRINJENO VOZLIŠČE št. 2



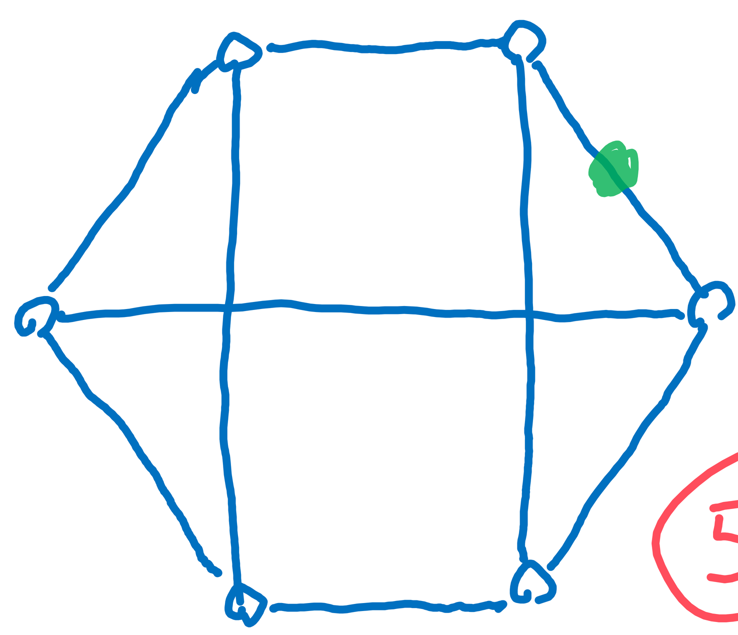
5

0 trikotnikov



5

2 trikotnika



5

1 trikotnik

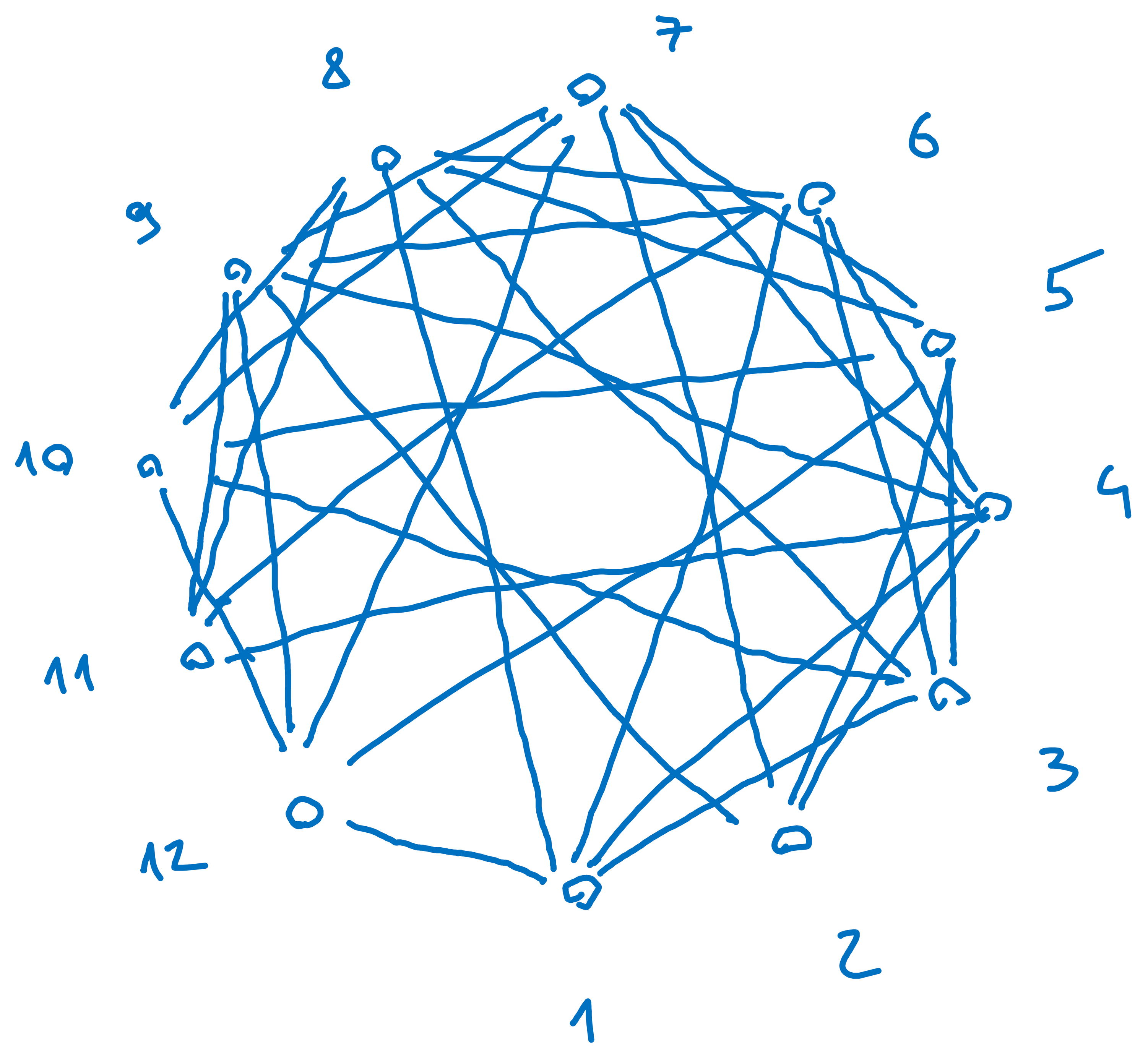
razl. št. trikotnikov $\Rightarrow$ neizomorfni grafi

5

3. naloga (25 točk)

Graf G naj ima množico točk enako $\{1, \ldots, 12\}$, točki pa sta sosedi natanko tedaj, ko je njuna razlika praštevilo.[2]

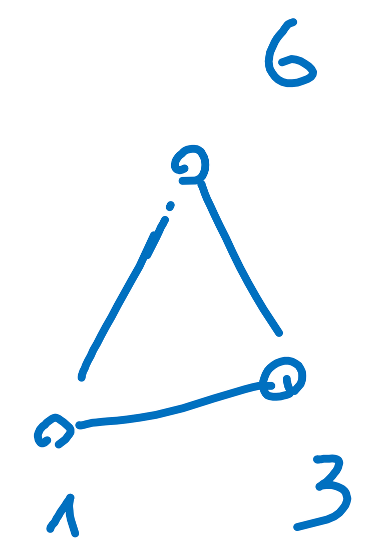
a) (5 točk) Čim lepše nariši graf G.



5

b) (8 točk) Ali je graf G dvodelen? Ali je Eulerjev?

NI dvodelen, vsebuje lih cikel, npr.



2

2

NI Eulerjev, vsebuje vozl. lihe stopnje, npr. $\deg(1) = 5$.

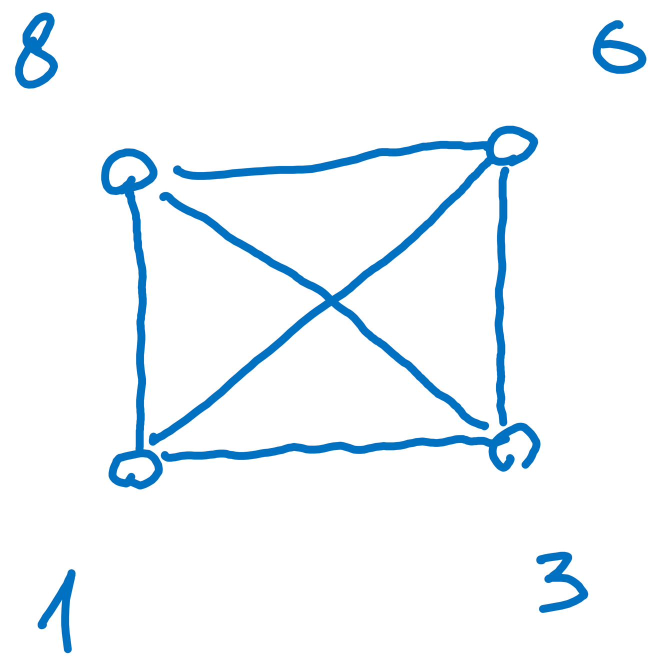
2

2

c) (12 točk) Poišči kliko velikosti 4 v grafu G in določi kromatično število grafa G.

BROOKS

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)$$



Klika velikosti 4

3

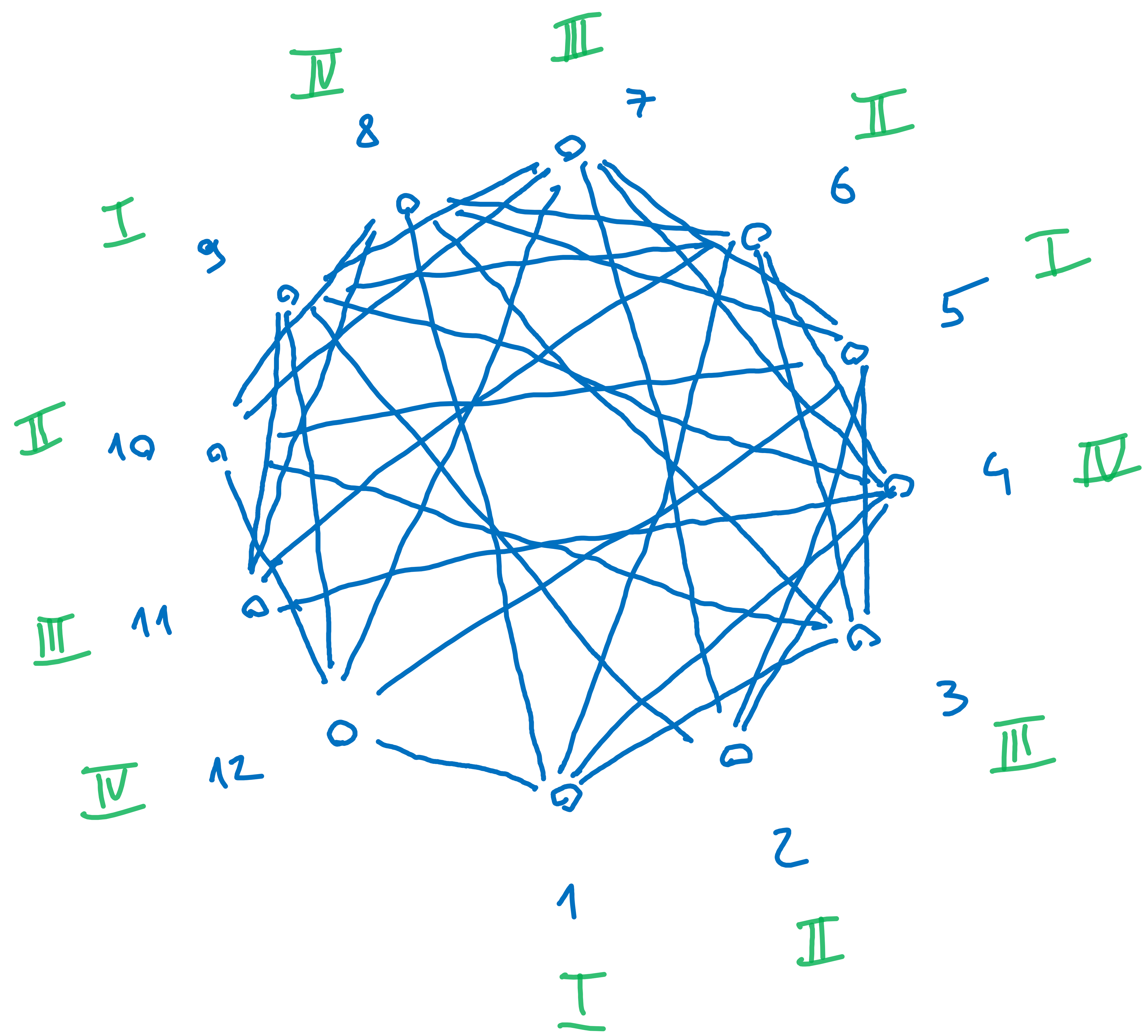
$$4 \leq \chi(G) \leq 6$$

2

Večjih klik ni $\Rightarrow \omega(G) = 4$

4-barvanje:

7



$\Rightarrow \chi(G) = 4$

(5-barvanje 3,

6-barvanje 1)

4. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Z uporabo razširjenega Evklidovega algoritma poišči največji skupni delitelj števil 60 in 33.

I	$1 \cdot 60 + 0 \cdot 33 = 60$
II	$0 \cdot 60 + 1 \cdot 33 = 33$
III = I − 1·II	$1 \cdot 60 - 1 \cdot 33 = 27$
IV = II − 1·III	$-1 \cdot 60 + 2 \cdot 33 = 6$
V = III − 4·IV	$5 \cdot 60 - 9 \cdot 33 = \boxed{3}$
VI = IV − 2·V	$-11 \cdot 60 + 20 \cdot 33 = 0$

$\gcd(60, 33) = 3$

ODGOVOR 2

ALGORITEM 8

b) (8 točk) Poišči splošno rešitev linearne diofantske enačbe $60x + 33y = 120$.

$\underbrace{120}$ 3 deli 120 ✓

OSNOVNA: $5 \cdot 60 - 9 \cdot 33 = 3 \quad | \cdot 40$

$200 \cdot 60 - 360 \cdot 33 = 120 \Rightarrow \underset{x_0}{(200}, \underset{y_0}{-360)}$ 2

SPLOŠNA: $120 = 120 + t \cdot 0$

$120 \overset{\text{VI}}{=} 200 \cdot 60 - 360 \cdot 33 + t \cdot (-11 \cdot 60 + 20 \cdot 33)$

$120 = (200 - 11t) \cdot 60 + (-360 + 20t) \cdot 33$

$(x_t, y_t) = (200 - 11t, -360 + 20t), \ t \in \mathbb{Z}$

3 3

c) (7 točk) Ali ima enačba $60x + 33y = 120$ rešitve v množici naravnih števil? Poišči jih!

$x_t \geq 0$ 1 $\qquad y_t \geq 0$ 1

$200 - 11t \geq 0 \qquad -360 + 20t \geq 0$

$-11t \geq -200 \qquad 20t \geq 360$

$t \leq 18,18 \qquad t \geq 18$

$\Rightarrow \boxed{t = 18}$ 2

$(x_{18}, y_{18}) = (2, 0)$ 3