Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize: prvi kolokvij

29. november 2023

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Reši enačbo

$$|z| = (1+i)z + i.$$

Rešitev: Za $z = x+iy$ dobimo $\sqrt{x^2+y^2} = x-y+i(x+y+1)$. Sledi $\sqrt{x^2+y^2} = x-y$, kar nam da $xy = 0$. Pri $x = 0$ iz $x+y+1 = 0$ sledi $y = -1$ oz. $z = -i$. Pri $y = 0$ iz $x+y+1 = 0$ sledi $x = -1$, vendar to ne ustreza $\sqrt{x^2+y^2} = x-y$. Torej je $z = -i$ edina rešitev.

b) (10 točk) Poišči vsa realna števila a, za katera **ni rešljiva** enačba

$$|z| = az + i.$$

Rešitev: Za $z = x+iy$ dobimo $\sqrt{x^2+y^2} = ax + i(ay+1)$. Sledi $y = -1/a$ pri pogoju $a \neq 0$. Iz $\sqrt{x^2+y^2} = ax$ sledi $x^2+y^2 = a^2x^2$, kar nam da $x^2(1-a^2) = y^2$. Ker je $y \neq 0$, mora biti $1-a^2 > 0$, kar pomeni, da za $|a| \leq 1$ enačba ni rešljiva.

2. naloga (25 točk)

Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano rekurzivno:

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} = 8 - \frac{15}{a_n} \ .$$

a) (10 točk) Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je zaporedje naraščajoče.
Rešitev: Ker je $a_1 = 4.25$, velja $a_0 < a_1$. Če je $a_n < a_{n+1}$, je $15/a_n > 15/a_{n+1}$ in $-15/a_n < -15/a_{n+1}$. Sledi $a_{n+1} = 8 - 15/a_n < 8 - 15/a_{n+1} = a_{n+2}$.

b) (10 točk) Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je zaporedje navzgor omejeno.
Rešitev: Iz točke (c) razberemo, da bo smotrno za zgornjo mejo postaviti število 5. Vsekkor je $a_0 < 5$. Če je $a_n < 5$, je $15/a_n > 15/5 = 3$. Torej je $-15/a_n < -3$ in $a_{n+1} = 8 - 15/a_n < 8 - 3 = 5$.

c) (5 točk) Izračunaj limito zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Rešitev: Ker je zaporedje naraščajoće in omejeno, je konvergentno. Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Potem je $a = 8 - 15/a$, kar nam da kvadratno enačbo $a^2 - 8a + 15 = 0$ z rešitvama $a = 3$ in $a = 5$. Ker je $a_0 > 3$, je $a = 5$ limita.

3. naloga (25 točk)

a) (12 točk) Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(1+x)^n}$$

konvergira? Za takšne vrednosti vrsto tudi seštej.
Rešitev : Vrsta je geometrijska s koeficientom $q = \frac{2}{1+x}$. Pogoj za konvergenco je $|q| < 1$, kar da neenačbo

$$\frac{2}{|1+x|} < 1,$$

ki ima rešitev $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.

Vsota je

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{1+x}} = \frac{1+x}{x-1}$$

b) (5 točk) Za vrsto iz a) določi vrednost x, da bo vsota vrste enaka 2.
Rešitev : Rešitev enačbe

$$\frac{1+x}{x-1} = 2$$

je $x = 3$.

c) (8 točk) Z uporabo konvergenčnih kriterijev ugotovi, za katere vrednosti $x > -1$ vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(1+x)^n}$$

konvergrira?
Rešitev : Za vrsto s členi $a_n = \frac{n^2}{(1+x)^n}$ lahko izračunamo limito

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(1+x)^{n+1}} \cdot \frac{(1+x)^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

Po kvocientnem kriterija vrsta konvergira pri pogoju $L < 1$, kar je ekvivalentno $x > 1$, in divergira pri pogoju $L > 1$, kar je ekvivalentno $x < 1$. Za primer $L = 1$ oz. $x = 0$ dobimo vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2$$

ki jasno divergira.

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

a) (7 točk) Določi definicijsko območje D_f funkcije f. Ali je f injektivna?
Rešitev : Funkcija f je definirana za vrednosti x, za katere je izraz

$$1 - x^2 > 0$$

(izraz mora biti nenegativen zaradi korenjenja in neničelen zaradi deljenja). Neenačba ima rešitev $x \in (-1, 1)$.

Funkcija ni injektivna, ker je soda, $f(-x) = f(x)$.

b) (7 točk) Omejimo definicijsko območje funkcije f na $x \geq 0$. Določi inverz funkcije f glede na to definicijsko območje.
Rešitev : (Lokalni) inverz lahko določimo z reševanjem enačbe

$$x = f(y)$$

Dobimo dve rešitvi

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\log^2(x)}}$$

Ker je definicijsko območje omejeno na pozitivna števila in je zaloga vrednost $Z_{f^{-1}} = D_f$, moramo za inverz izbrati $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\log^2(x)}}$

c) (5 točk) Definirajmo še funkcijo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : \quad x \in D_f \\ 0 & : \quad x \notin D_f \end{cases}$$

Ali je g zvezna funkcija?
Rešitev : Izračunati je potrebno limiti na robu $D_f = (-1, 1)$. Ker je funkcija soda, je dovolj izračunati

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} e^{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = e^{-\infty} = 0$$

ker se ujema z limito $\lim_{x \downarrow 1} g(x) = 0$. Funkcija je torej zvezna.

d) (6) Zapiši enačbo tangente na f v točki $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Rešitev : Odvod je enak

$$f'(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} x}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

Vrednost funkcije f v točki x_0 je enaka

$$f(x_0) = e^{-\sqrt{2}},$$

vrednost odvoda pa

$$f'(x_0) = -2e^{-\sqrt{2}}$$

Enačba tangente je tako

$$y = -2e^{-\sqrt{2}}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + e^{-\sqrt{2}}$$