Natančnejša aproksimacija funkcije

Spomnimo se linearne aproksimacije funkcije v okolici točke x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Izkaže se, da je lahko to še izboljšamo z naslednjim zaporedjem aproksimacij:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2,$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3,$$

$$\vdots$$

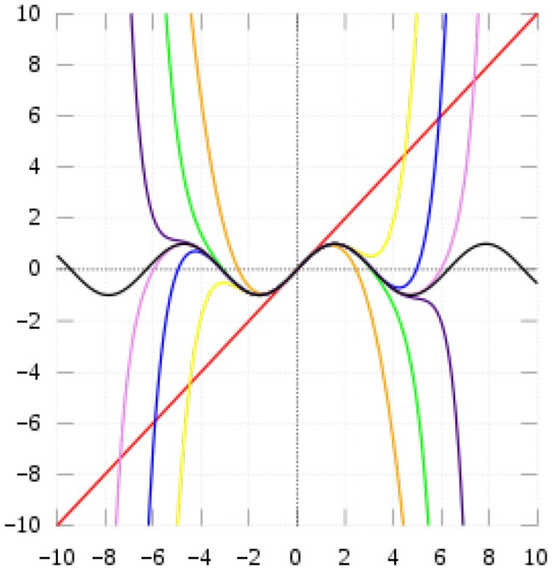
$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{T_n(x;x_0)}.$$

Polinomu $T_n(x; x_0)$ pravimo **Taylorjev polinom stopnje n** funkcije f v točki x_0 in zadošča

$$T_n(x_0; x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0; x_0) = f'(x_0),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(x_0; x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Torej se vsak naslednji Taylorjev polinom bolj prilega grafu funkcije f v okolici točke x_0, saj se ujema še v enem odvodu višje stopnje.

Izboljševanje prileganja Taylorjevih polinomov z naraščanjem stopnje n za funkcijo $f(x) = \sin x$ (črna krivulja na grafu). Stopnja krivulj narašča od rdeče krivulje ($n = 1$) prek oranžne, rumene, zelene, modre, vijolične, do roza krivulje.



Dinamična vizualizacija na https://ggbm.at/rnn2bknq

Taylorjeva formula

Izrek

Če je f vsaj $(n+1)$-krat odvedljiva v točki x_0, potem na nekem intervalu okrog x_0 velja **Taylorjeva formula***:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f(x)),$$

kjer je

$$R_n(f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

za nek c med x_0 in x.

Če je f neskončnokrat odvedljiva v točki x_0, potem ji lahko priredimo **Taylorjevo vrsto** v točki x_0:

$$T_f(x; x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

Če v točki x velja $\lim_{n\to\infty} R_n(f(x)) = 0$, potem je $f(x) = T_f(x; x_0)$.

Taylorjevi polinomi nekaterih elementarnih funkcij

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(e^x),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(\sin x),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(\cos x),\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_n\left(\frac{1}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Primer

Ocenimo vrednost funkcije $f(x) = \sin x$ v okolici točke $x_0 = 0$ z linearno in kvadratno aproksimacijo in ocenimo napaki.

Velja

$$\sin x = T_1(x) + R_1(\sin x) = x + \frac{-\sin c}{2!}x^2,$$
$$\sin x = T_2(x) + R_2(\sin x) = x + \frac{-\cos c_2}{3!}x^3.$$

Velja:

$$|R_2(x)| = \frac{|f^{(3)}(c)|}{6}|x|^3 = \frac{|\cos c|}{6}|x|^3 \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

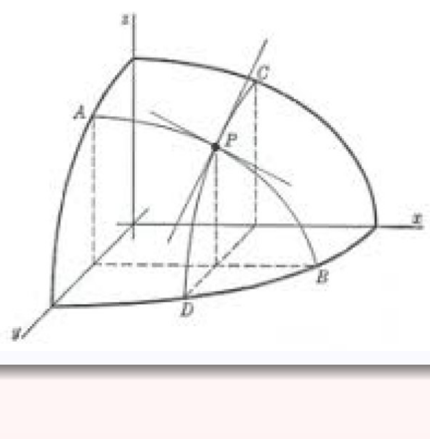
- Približek $\sin \pi/8 = \pi/8$ ima tako absolutno napako največ
$$\left(\frac{\pi}{8}\right)^3 \frac{1}{6} < \left(\frac{3.2}{8}\right)^3 \frac{1}{6} = \frac{4^2}{8^3} < 0.25 \cdot \frac{1}{8} = 0.03125,$$
torej je ocena $\sin \pi/8 \doteq \pi/8 \doteq 0.4$ na eno decimalno mesto natančna.
- $\sin x \doteq x$ je na dve decimalki natančna ocena, če je
$$\frac{|x|^3}{6} < 0.5 \cdot 10^{-2}, \quad |x| < \frac{\sqrt[3]{30}}{10},$$
torej za vsak kot x velikosti $|x| < \frac{3}{10}$, kar je približno 18°.

Odvodi funkcije več spremenljivk

Parcialna odvoda funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ v točki (a, b) definiramo kot

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Pomen parcialnega odvoda

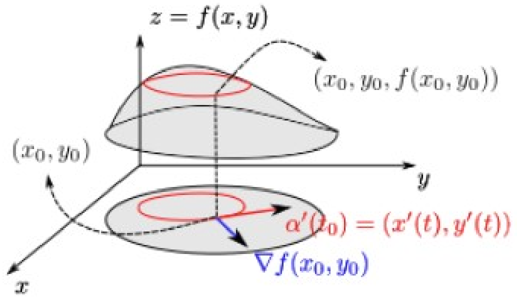
Parcialni odvod po x v točki (x_0, y_0)

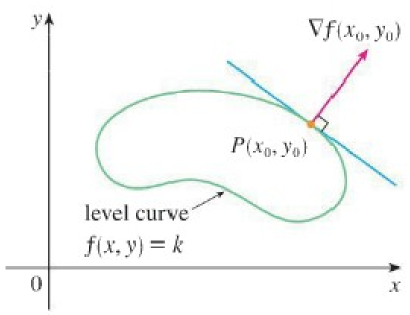
- je **relativna sprememba funkcijske vrednosti** pri zelo majhni spremembi spremenljivke x, kjer je neodvisna spremenljivka y fiksna,
- je **smerni koeficient tangente** pri x_0 na krivuljo, ki jo dobimo, če graf funkcije prerežemo vzdolž ravnine $y = y_0$,
- opisuje **gibanje funkcijskih vrednosti** (naraščanje ali padanje) ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi x.

Gradient funkcije dveh spremenljivk

Gradient funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) je vektor

$$\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$





Primera

$f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + y + x$

$f_x(x,y) = 2x + 3y^2 + 1$

$f_y(x,y) = 6xy + 1$

$\nabla f(x,y) = \big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big)$

$\nabla f(x,y) = (2x + 3y^2 + 1, 6xy + 1)$

npr. $\nabla f(1,-1) = (6,-5)$

$f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$

$f_x(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

$f_y(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$

$\nabla f(x,y) = \big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big)$

$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(y,-x)$

npr. $\nabla f(1,2) = (\frac{2}{5}, \frac{-1}{5})$

Parcialni odvodi funkcije več spremenljivk

Parcialni odvod funkcije n spremenljivk $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po spremenljivki x_i v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definiramo kot

$$f_{x_i}(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_i+h,\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n))}{h}.$$

Gradient funkcije n spremenljivk $f(x_1,\ldots,x_n)$ v točki $(a_1,\ldots,a_n)$ je vektor v $\mathbb{R}^n$, ki ima za komponente vse parcialne odvode:

$$\mathrm{grad}\, f(a_1,\ldots,a_n) = (f_{x_1}(a_1,\ldots,a_n),\ldots,f_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)).$$

Za računanje parcialnih odvodov lahko uporabljamo pravila za odvajanje, pri čemer eno spremenljivko obravnavamo kot spremenljivko, ostale pa kot parametre (tj. konstante).

Primer

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$f_x(x,y,z) = 2x$$
$$f_y(x,y,z) = 2y$$
$$f_z(x,y,z) = 2z$$
$$\nabla f(x,y,z) = \big(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\big)$$
$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$
$$\text{npr. } \nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$$

Primeri

- $f(x,y) = \log(x + \sqrt{x^2+y^2})$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$$

- $g(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$

$$g_x(x,y) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$g_y(x,y) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

- $h(x,y,z) = y\sin(x+2z)$

$h_x(x,y,z) = y\cos(x+2z)$, $h_y(x,y,z) = \sin(x+2z)$, $h_z(x,y,z) = 2y\cos(x+2z)$.

Linearna aproksimacija funkcije dveh (ali več) spremenljivk

Imejmo funkcijo $f(x, y)$, ki jo poznamo v točki (x_0, y_0). Če v tej točki poznamo tudi oba parcialna odvoda $f_x(x_0, y_0)$ in $f_y(x_0, y_0)$, potem lahko (dovolj lepo) funkcijo aproksimiramo v okolici točke (x_0, y_0). Formula je podobna kot pri funkciji ene spremenljivke

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Primer

S pomočjo linearnega približka izračunajmo $2.1 \cdot 3.8^2$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \cdot y^2 & f(2, 4) &= 32 \\ f_x(x, y) &= y^2 & f_x(2, 4) &= 16 \\ f_y(x, y) &= 2xy & f_y(2, 4) &= 16 \end{aligned}$$

$$f(2.1, 3.8) \doteq 32 + 16(2.1 - 2) + 16(3.8 - 4) = 30.4$$

Točen rezultat je 30.324.

Geometrijski pomen linearnega približka

Vrednost aproksimiramo z vrednostjo na tangentni ravnini.

Verižno pravilo

Imamo naslednje podatke:

- $f(x, y)$ je parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk v vsaki točki (x, y) iz množice $D \subset \mathbb{R}^2$, pri čemer sta parcialna odvoda $f_x(x, y)$ in $f_y(x, y)$ zvezni funkciji,
- $x(t)$ in $y(t)$ sta odvedljivi funkciji spremenljivke t, tako da je za vsak t točka $(x(t), y(t))$ v D.

Sestavljena funkcija

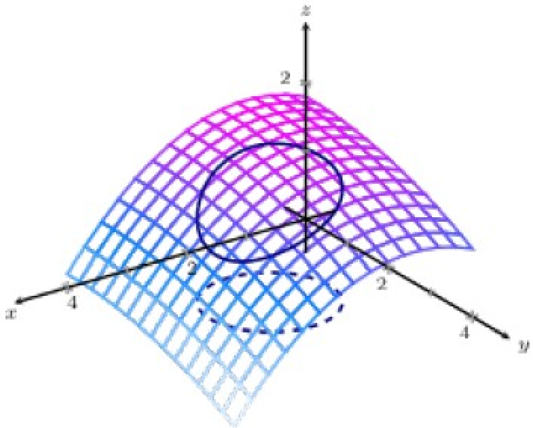
$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

je odvedljiva in velja **verižno pravilo**:

$$\boxed{g'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)}$$

Odvajanje funkcije dveh spremenljivk po parametru

Funkcija $g(t)$ opisuje vrednosti $f(x,y)$ nad parametrizirano krivuljo $x = x(t), y = y(t)$, njen odvod $g'(t)$ pa spremembo funkcijske vrednosti $f(x,y)$ ob majhnem premiku vzdolž parametrizirane krivulje $x = x(t), y = y(t)$.



Primer. Iz točke $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ se malo premaknemo vzdolž enotske krožnice $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$. Ali bo vrednost funkcije $f(x,y) = 3 + x^2 - y^2$ ob tem narasla ali padla?

Funkcijsko vrednost pri gibanju po krožnici opisuje funkcija $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Zanima nas $g'(t_0)$, kjer je $(\cos t_0, \sin t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ oz. $t_0 = \frac{\pi}{3}$. Z verižnim pravilom dobimo

$$g'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

Velja

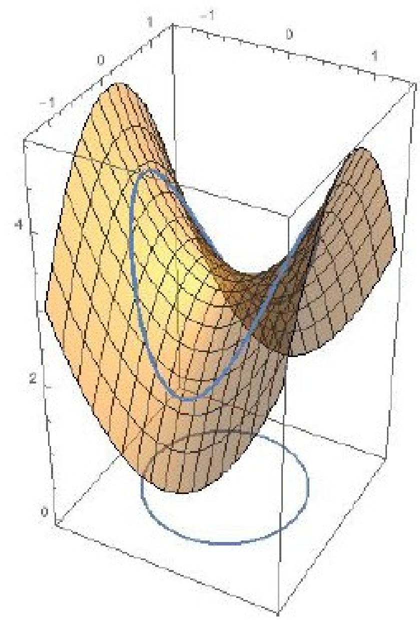
$$f_x(x,y) = 2x,\ f_y(x,y) = -2y \quad \text{in} \quad x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t.$$

Torej

$$g'(t_0) = -2x(t_0)\sin t_0 - 2y(t_0)\cos t_0 = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3}.$$

Ker je $g'(t_0) < 0$, bo funkcijska vrednost padala.

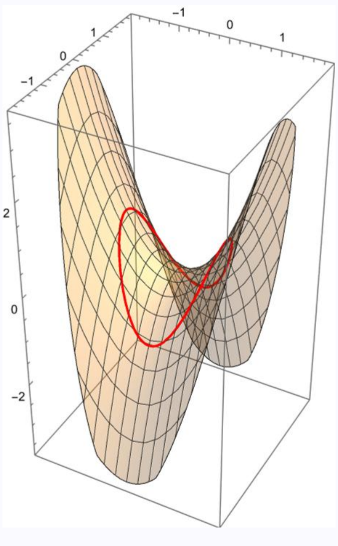
Graf $f(x, y) = 3 + x^2 - y^2$



Primer (podoben kot prejšnji)

Za $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ in $f(x, y) = x^2 - y^2$ izračunamo

$$
\begin{aligned}
g(t) &= f\big(x(t), y(t)\big) \\
&= \cos^2 t - \sin^2 t \\
&= \cos(2t)
\end{aligned}
$$



Če zapišemo $(x(t), y(t), g(t))$, oziroma $(\cos t, \sin t, \cos(2t))$, nam to predstavlja 'zvito' krožnico na sedlu. Preslikava

$$t \longmapsto (\cos t, \sin t, \cos(2t))$$

preslika interval $[0, 2\pi]$ v 'zvito' krožnico na sedlu v 3-dimenzionalnem prostoru.

Odvod funkcije $g(t) = \cos(2t)$ lahko izračunamo direktno $g'(t) = -2\sin(2t)$ ali z uporabo verižnega pravila

$$g'(t) = f_x \cdot x' + f_y \cdot y' = 2x \cdot x' - 2y \cdot y' = 2\cos t \cdot (-\sin t) - 2\sin t \cdot \cos t = -2\sin(2t)$$

Kaj pomeni $g'(t)$? Funkcija $g(t)$ predstavlja z-komponento 'gibanja po zviti krožnici' v prostoru. $g'(t)$ torej pove, ali gremo gor ali gremo dol, ko se t malo poveča.