Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

17. november 2023

Kaj je relacija

Množica R je *(dvomestna) relacija*, če je vsak njen element urejen par.

$$R \text{ je relacija.} \iff \forall x \in R \,\exists u, v \;:\; x = (u, v)$$

Množica R je *(dvomestna) relacija v množici* A, če je $R \subseteq A \times A$.

Zgledi

1. $A = \{e, f, g, h\} \qquad R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$
2. $A = \mathbb{N} \qquad R = \{(x, y)\ ;\ x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$
3. $\emptyset \subseteq A \times A$
4. $A \times A \subseteq A \times A$
5. $\mathrm{id}_A = \{(x, x)\ ;\ x \in A\}$

Namesto $(x, y) \in R$ pišemo xRy.

Domena in zaloga vrednosti

Naj bo R relacija v A.
$\mathcal{D}_R = \{x\ ;\ \exists y : xRy\}$ *domena* ali *definicijsko območje* relacije R.
$\mathcal{Z}_R = \{y\ ;\ \exists x : xRy\}$ *zaloga vrednosti* relacije R.

Lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A. Pravimo, da je

1. R *refleksivna* $\iff \forall x \in A : xRx$
2. R *simetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
3. R *antisimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
4. R *tranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
5. R *sovisna* $\iff \forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
6. R *enolična* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$

Zgledi

1. Relacija id_A v A
2. Relacija $\leq$ v $\mathbb{N}$
3. Relacija $<$ v $\mathbb{N}$
4. Relacija $\subseteq$ v $\mathcal{P}A$
5. Relacija *"oče"* v množici ljudi (x oče y preberemo kot x *je oče* y*-ona.*)

Grafična predstavitev relacije

R naj bo relacija v *končni* množici A.

Elemente množice A narišemo kot *točke* v ravnini. Če velja aRb, narišemo usmerjeno puščico od a do b.

elementi A ... točke v ravnini
aRb ... usmerjena puščica od a do b.

Zgled: $A = \{e, f, g, h\}$ $\quad R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$

Operacije z relacijami

Relacije so posebne vrste množic. Vemo, kako so definirane operacije $\cup, \cap$ in $\setminus$.

Ponavadi se pogovarjamo o družini relacij na isti množici A. V takem primeru je *komplement* smiselno definirati kot

$$R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$$

Operacije z relacijami

Poleg navedenih operacij definiramo tudi:

- *inverzno relacijo* relacije R, označimo jo z R^{-1}:

$$R^{-1} := \{(y, x) \; ; \; (x, y) \in R\}$$

- *produkt relacij* R in S, označimo ga z $R * S$:

$$R * S := \{(x, z) \; ; \; \exists y \, (xRy \wedge ySz)\}$$

Operacije z relacijami

Zgled: sorodstvene relacije med ljudmi

Relacija *oče* v množici ljudi je definirana kot

x oče $y \Leftrightarrow x$ *je oče* y*-ona.*

Naloga: Izrazi relacije *roditelj*, *zet*, *snaha*, *ded*, *vnuk*, *tašča*, *svak* z "bolj elementarnimi" sorodstvenimi relacijami *oče*, *mati*, *sin*, *hči*, *mož*, *žena*, ...

Lastnosti operacij z relacijami

Naj bodo R, S, T relacije na A.

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$
3. $(R * S) * T = R * (S * T) =: R * S * T$
4. $R * (S \cup T) = R * S \cup R * T$
5. $(R \cup S) * T = R * T \cup S * T$
6. $R * \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A * R = R$
7. $R \subseteq S \implies R * T \subseteq S * T \text{ in } T * R \subseteq T * S$

Potence relacij

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo potence relacij. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$$\begin{array}{lcl} R^0 & := & \mathrm{id}_A \\ R^{n+1} & := & R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{array}$$

Velja $R^1 = R$, $R^2 = R * R$, ter za $m, n \geq 0$ tudi $R^m * R^n = R^{m+n}$.

Potence relacij

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je $n > 0$, potem

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Toda če sta m in n celi števili različnih predznakov, potem $R^n * R^m$ ni nujno enako R^{m+n}.

Potence relacij

Zgled: sorodstvene relacije med ljudmi
Naloga: Definiraj relacije *prednik*, *potomec*, *sorodnik*.

Potence relacij

Naj bo R relacija v A.
Relacijo R^+ imenujemo *tranzitivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

Relacijo R^* imenujemo *tranzitivno-refleksivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

Vprašanje: Kako s pomočjo grafa relacije R opišemo grafa relacij R^+ in R^*?

Algebraična karakterizacija lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A. Relacija R je

1. *refleksivna* $\iff \mathrm{id}_A \subseteq R$
2. *simetrična* $\iff R^{-1} = R$
3. *antisimetrična* $\iff R^{-1} \cap R \subseteq \mathrm{id}_A$
4. *tranzitivna* $\iff R^2 \subseteq R$
5. *sovisna* $\iff \mathrm{id}_A \cup R \cup R^{-1} = U_A$
6. *enolična* $\iff R^{-1} * R \subseteq \mathrm{id}_A$

Preslikave

Relacija $f \subseteq A \times B$ je *preslikava iz A v B*, če velja:

- f je enolična
- $\mathcal{D}_f = A$
- $(\mathcal{Z}_f \subseteq B)$

Pišemo tudi $f : A \to B$.

Preslikave

Namesto $x \, f \, y$ pišemo $y = f(x)$,

in pravimo, da f *(pre)slika* x v y,

x je *argument*, y pa *vrednost* preslikave f pri x.

Tudi: y je *slika* x-a.

Preslikave

Naj bo f preslikava iz A v B.

- $A = \mathcal{D}_f \quad \ldots \quad$ domena ali definicijsko območje f
- $\mathcal{Z}_f \quad \ldots \quad$ zaloga vrednosti f
- $B \quad \ldots \quad$ kodomena f

Preslikave

Zgled: Naj bo X množica nepraznih bitnih besed $\{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$ in Y množica naravnih števil $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Definirajmo relacije $f_1, f_2, f_3 \subseteq X \times Y$, $f_4 \subseteq X \times X$ in $f_5 \subseteq Y \times X$ z naslednjimi opisi:

- $x\, f_1\, y$ natanko tedaj, ko je y število enic v x-u.
- $x\, f_2\, y$ natanko tedaj, ko je y prvi bit niza x.
- $x\, f_3\, y$ natanko tedaj, ko je y mesto najbolj leve ničle v x-u.
- $x_1\, f_4\, x_2$ natanko tedaj, ko x_2 dobimo tako, da nizu x_1 dodamo na koncu 0 ali 1.
- $y\, f_5\, x$ natanko tedaj, ko je x niz y zaporednih enic.

Katere izmed relacij f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 so preslikave?

Lastnosti preslikav

Naj bo $f : A \to B$. Pravimo, da je

- f *injektivna*, če $\forall x, y \in A : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- f *surjektivna*, če $\mathcal{Z}_f = B$ (pravimo tudi, da je f preslikava iz A na B)
- f *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Zgledi preslikav

1. $\mathrm{id}_A : A \to A$, *identiteta na* A
   $\mathrm{id}_A(x) = x$, je bijektivna
2. $p_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$, *projekcija na* i*-to komponento*
   $p_i((a_1, \ldots, a_n)) = a_i$, je surjektivna
3. $A_1 \subseteq A$, $i = \mathrm{id}_A|_{A_1}$
   $i : A_1 \hookrightarrow A, i(x) = x$ je injektivna, *vložitev* A_1 *v* A
4. $A \subseteq B$, $\chi_A : B \to \{0, 1\}$
   $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$,
   karakteristična funkcija množice A *(v* B*)*

Inverzna preslikava

Vprašanje: Kdaj je f^{-1} tudi preslikava?

Trditev

$f : A \to B$

1. *f^{-1} je enolična natanko tedaj, ko je f injektivna,*
2. *$f^{-1} : B \to A$ natanko tedaj, ko je f bijektivna.*

Kompozitum preslikav

Naj bosta $g : A \to B$ in $f : B \to C$. Potem je $f \circ g$ preslikava iz A v C določena s predpisom

$$f \circ g = g * f.$$

Velja $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ za vse $a \in A$.

Trditev

Kompozitum preslikav je asociativna operacija, velja namreč:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Lastnosti kompozituma

Trditev

Naj bo $f : A \to B$. Potem je

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$$

Trditev

$f : B \to C, g : A \to B$

1. f, g *injektivni* $\Longrightarrow f \circ g$ *injektivna*
2. f, g *surjektivni* $\Longrightarrow f \circ g$ *surjektivna*
3. $f \circ g$ *injektivna* $\Longrightarrow g$ *injektivna*
4. $f \circ g$ *surjektivna* $\Longrightarrow f$ *surjektivna*

Lastnosti kompozituma

Trditev

Naj bo $f : B \to A$, $g : A \to B$. Če je $f \circ g = \mathrm{id}_A$ in $g \circ f = \mathrm{id}_B$, potem sta f in g bijekciji in je $g = f^{-1}$.

Dirichletov princip

Izrek

Naj bo A končna množica in $f : A \to A$. Potem so naslednje trditve enakovredne:

- *f je injektivna.*
- *f je surjektivna.*
- *f je bijektivna.*

Ekvivalenčna relacija

$R \subseteq A \times A$ je *ekvivalenčna*, če je

- refleksivna,
- simetrična in
- tranzitivna.

Ekvivalenčna relacija

Zgledi:

1. Relacija $||$ vzporednosti v množici vseh premic v ravnini.
2. $A = \{\text{ljudje}\}$, $xRy \iff x$ ima enako barvo oči kot y.
3. $f : A \to B$, $x, y \in A : xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
   x in y imata isto funkcijsko vrednost.
4. Naj bo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Definirajmo relacijo R v množici $\mathbb{Z}$:

$$xRy \iff m \text{ deli } |x - y|$$

Ekvivalenčni razredi

Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna in $x \in A$.

$R[x] = \{y \in A \,;\, yRx\}$ je *ekvivalenčni razred* elementa x.

$A/R = \{R[x] \,;\, x \in A\}$ (množica vseh ekvivalenčnih razredov) je *faktorska (kvocientna) množica* množice A po relaciji R.

Ekvivalenčni razredi, razbitje

Trditev

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem za poljubna $x, y \in A$ velja

$$R[x] = R[y] \iff xRy$$

Izrek

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem je A/R razbitje množice A.

Zgledi faktorskih množic

- "premice v ravnini" / "vzporedne premice" $=$ $\{\{$navpične pr.$\}, \{$vodoravne pr.$\}, \{$pr. pod kotom $45^\circ\}, \ldots\} \cong$ "množica vseh *smeri* v ravnini" $\cong [-\pi/2, \pi/2)$