1.2 Matrike

element $a_{13}=4$

Primeri: $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 1}$, $B=\begin{array}{c} \\ 1. \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & 3. & \end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & \pi\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 6\end{bmatrix}\end{array}\in\mathbb{R}^{3\times 4}$

vrstica matrike B

stolpec matrike B

število vrstic

število stolpcev

Definicija: Matrika velikosti $m\times n$ je pravokotna tabela števil z m vrsticami in n stolpci

$$A = m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}}^{n}\right. = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

$\mathbb{R}^{m\times n}$ ... množica vseh matrik z m vrsticami in z n stolpci

$0=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ matriko samih ničel imenujemo ničelna matrika.

$A\in\mathbb{R}^{m\times 1}$ je stolpec, $B=\mathbb{R}^{1\times n}$ je vrstica.

Def: Matriki $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ in $B=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{p\times q}$ sta enaki, če
a) $m=p$ in $n=q$ (sta enako veliki)
b) $a_{ij}=b_{ij}$ za vsak $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ (se ujemata v istoležnih elementih.)

1.2.1. Operacije z matrikami

$\boxed{A}$ Množenje matrike s skalarjem

$$3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 9\\ 12 & 15 & 18\end{bmatrix}$$

Def: Za $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ in $\alpha\in\mathbb{R}$ je $\alpha A=[\alpha a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

$$\left(\text{t.j.: } \alpha\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn}\end{bmatrix}\right)$$

B Vsota matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \overset{+}{+} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+7 & 5+8 \\ 2+0 & 4+9 & 6+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 13 \\ 2 & 13 & 16 \end{bmatrix}$$

1. vrstica, 2. stolpec

enako veliki!

Def: Za matriki $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ in $B=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo vsoto kot

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

A+B Linearna kombinacija matrik

Za $A_1,\dots,A_k\in\mathbb{R}^{m\times n}$ in $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ je $\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\dots+\alpha_kA_k$ linearna kombinacija matrik $A_1,\dots,A_k$.

Primer:

Ali lahko zapišemo matriko $\underset{}{\overset{M}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}}}$ kot linearno kombinacijo matrik $\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$, $\underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$ in $\underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$? (Rešitev.)

Ali obstajajo α,β,γ, da je $M=\alpha A+\beta B+\gamma C$?

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}} = \alpha\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \beta & -\beta \\ -\beta & -2\beta & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & 2\gamma & 0 \\ -\gamma & -2\gamma & \gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} \beta+\gamma & \alpha+\beta+2\gamma & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta-\gamma & -2\beta-2\gamma & \beta+\gamma \end{bmatrix}}$$

← 1 matrična enačba

(po komponentah:)

$$\begin{aligned} \beta+\gamma &= 1 \\ \alpha+\beta+2\gamma &= 2 \\ \alpha-\beta &= 0 \\ \alpha-\beta-\gamma &= -3 \\ \cancel{-2\beta-2\gamma} &\cancel{= -2} \quad /:(-2) \\ \cancel{\beta+\gamma} &\cancel{= 1} \end{aligned}$$

enaki $:(-2)$

$\Rightarrow \beta=\alpha$, $\boxed{\gamma=3}$

$\beta+3=1$

$\boxed{\alpha=\beta=-2}$

$?\ (-2)+(-2)+2\cdot 3=2$ ✓

← 6 linearne enačb s 3 neznankami

$\alpha=\beta=-2$ in $\gamma=3$ so rešitev sistema lin. enačb in zato

$$M=(-2)\cdot A+(-2)B+3C$$

$\Rightarrow M$ je lin. kombinacija A, B in C.

Lastnosti seštevanja in množenja s skalarjem:

1) $A+B=B+A$ (komutativnost seštevanja)

$$[A+B]_{ij} = \overset{\in\mathbb{R}}{A_{ij}} + \overset{\in\mathbb{R}}{B_{ij}} = B_{ij}+A_{ij} = [B+A]_{ij}$$

$\swarrow\mathbb{R}$

$(A+B)+C = A+(B+C)$ (asociativnost seštevanja)

2) $A + \underset{\nwarrow \text{ničelna matrika}}{0} = A = 0+A$ (ničelna matrika je nevtralni element za +)

$[A+0]_{ij} = A_{ij} + 0 = A_{ij}$

3) $A + \underbrace{(-1)A} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-A=(-1)A$ (nasprotni element matrike A za +)

4) $\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A$

5) $1\cdot A = A$

$0 \cdot A = 0$

6) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

$$[\alpha(A+B)]_{ij} = \overset{\in\mathbb{R}}{\alpha}(\overset{\in\mathbb{R}}{A_{ij}}+\overset{\in\mathbb{R}}{B_{ij}}) = \alpha A_{ij} + \alpha B_{ij} = [\alpha A + \alpha B]_{ij}$$

$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributivnost $\times 2$)

+ realnih števil; + matrik

transponiranje matrik

$$\begin{array}{cc} & 3 \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T \end{array} = \begin{array}{cc} & 2 \\ 3 & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Za $A=[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je njena transponiranka (transponirana matrika) enaka

$A^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$

C Množenje matrik

(posplošuje skal. produkt vektorjev)

vektorja: $\vec a = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \vec b = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$

skalarni produkt

$\vec a \cdot \vec b = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6$

matrični produkt

$\vec a \cdot \vec b = \vec a^T \vec b$

skal. produkt

matriki: $A = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$

množenje matrik

$A^T \cdot B = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32 \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \boxed{3} \\ A' = \begin{array}{c}2\end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array} \qquad B = \boxed{3}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \ \overset{1}{}$$

enako!

sk. produkt

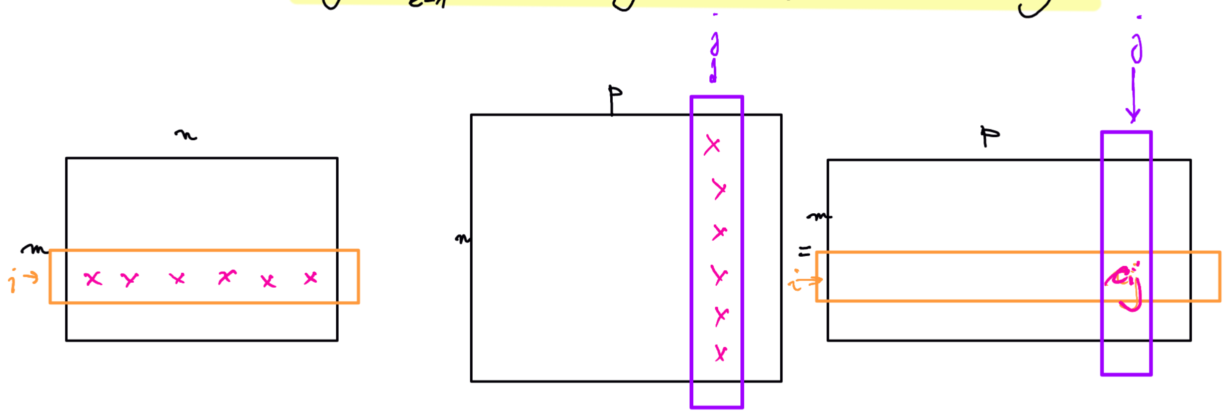
$$A' \cdot B = \begin{bmatrix}1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6\\ -1\cdot 4 + 0\cdot 5 + 1\cdot 6\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}32\\2\end{bmatrix}^{1}$$

sk. produkt

št. vrstic druge matrike je enako št. vrstic prve matrike!

Def: Za matriki $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times p}$ je njun produkt $A\cdot B = AB = C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times p}$ definiran kot

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in}\cdot b_{nj}$$



$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Primer:

∗ Primer: Naj bosta $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$. Izračunajte tiste izmed produktov AB, BA, $A^T B$, AB^T, ki jih lahko. (Rešitev.)

2x3 2x2   3x2 2x2   2x2 2x3   2x3 2x2

$$BA = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 1 + 0\cdot 3 & 1\cdot 2 + 0\cdot(-2) & 1\cdot 0 + 0\cdot 1\\ -3\cdot 1 + 1\cdot 3 & -3\cdot 2 + 1\cdot(-2) & -3\cdot 0 + 1\cdot 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -8 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 1 + 3(-3) & 3\\ 2\cdot 1 + (-2)(-3) & -2\\ 0\cdot 1 + 1(-3) & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & 3\\ 8 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

Ali obstaja tak $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, da je

vektor neznank

matrika sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} \; ?$$

matrična enačba

desna stran sistema

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x-2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix} \; ?$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} x+2y = 8 \\ 3x-2y+z = -1 \end{array} \; ?$$

sistem dveh linearnih enačb s tremi neznankami

koeficienti v sistemu

2. REŠEVANJE SISTEMA LINEARNIH ENAČB

Def: Sistem m linearnih enačb z n neznankami $x_1, \dots, x_n$ je

$$m \text{ enačb} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n}^{n \text{ neznank}} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

(ali krajše $A\vec{x} = \vec{b}$)

Sistemu priredimo

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$ matrika sistema

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ desna stran sistema

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ vektor neznank

$[A \,\vdots\, \vec{b}]$ $\quad m \times (n+1)$ $\quad$ razširjena matrika sistema

Rešitve sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ se ne spremenijo, če

(1) zamenjamo dve enačbi
(2) enačbo pomnožimo z neničelnim številom
(3) enačbi prištejemo večkratnik druge enačbe

Če katero izmed nasl. operacij izvedemo na razširjeni matriki sistema $[A \,\vdots\, \vec{b}]$, se rešitev $\vec{x}$ sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ NE spremenijo:

(E1) menjava dveh vrstic matrike
(E2) vrstico pomnožimo z neničelnim faktorjem
(E3) vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice

Gaussove elementarne operacije $\rightsquigarrow$ Gaussova eliminacija

ALGORITEM: $A\vec{x} = \vec{b} \longrightarrow [A \mid \vec{b}]$

Gaussova elim. (CILJ: veliko ničel v matriki, dovoljeno: (E1), (E2), (E3))

$[C \mid \vec{d}\,] \longrightarrow C\vec{x} = \vec{d}$

ista rešitev!

$\boxed{\text{Primer 1}}$: Rešimo sistem

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2y - z &= -3 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

$\operatorname{rang}[A \,\vdots\, \vec{b}] = 3 = \operatorname{rang}(A)$

razširjena matrika

x ne nastopa v nobeni drugi enačbi kot v prvi

x v 1. enačbi; y v 1. in 2. enačbi; z v vseh treh

$$[A \,\vdots\, \vec{b}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{/(-2)\ +} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{/\cdot 2\ +} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(E3) $v_3 \leftarrow v_3 + (-2)v_1$ (E1) $v_2 \leftrightarrow v_3$ (E3) $v_3 \leftarrow v_3 + 2v_2$

$1 \cdot z = 1 \Rightarrow \boxed{z = 1}$

način 1: z vstavljanjem od spodaj navzgor dobimo rešitev:

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned} \Rightarrow z = 1 \Rightarrow -y + 1 = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\boxed{x = 2,\ y = -1,\ z = 1}$$

način 2: nadaljujemo G.E.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \cancel{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{+} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$v_2 \leftarrow v_2 + (-1)v_3$ $v_1 \leftarrow v_1 + v_2$

$x = 2$
$-y = 1$
$z = 1$

$$\boxed{x = 2,\ y = -1,\ z = 1}$$

$\boxed{\text{Primer 2}}$: Rešimo sistem

$$\begin{aligned} x+y&=1\\ 2y-2z&=-3\\ 2x+y+z&=4 \end{aligned}.$$

$\mathrm{rang}(A)=2$, $\mathrm{rang}[A \,\vdots\, \vec{b}]=3$

$$[A \,\vdots\, \vec{b}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[v_3 \leftarrow v_3 - 2v_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[v_2 \leftrightarrow v_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[v_3 \leftarrow v_3 + 2v_2]{(2)\,+} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$\to 0x+0y+0z=1$

$\boxed{0=1}$

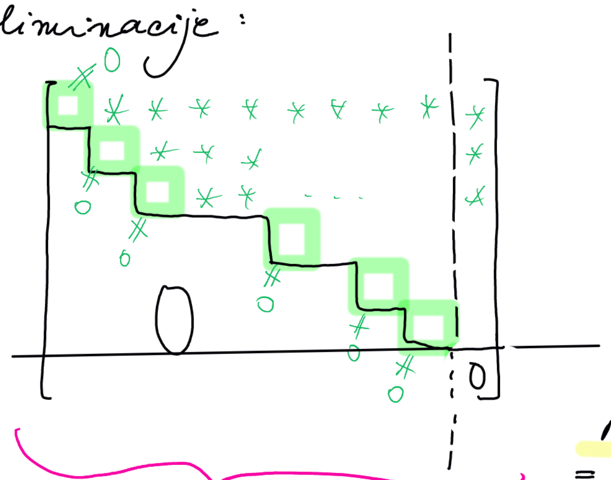
same ničle

neničelno število

SISTEM NIMA REŠITEV.

Cilj Gaussove eliminacije:

$[A \,\vdots\, \vec{b}] \to$



vrstično stopničasta oblika $[A \,\vdots\, \vec{b}]$

pivoti, ki jih dobimo po Gaussovi eliminaciji v vrstično stopničasti obliki

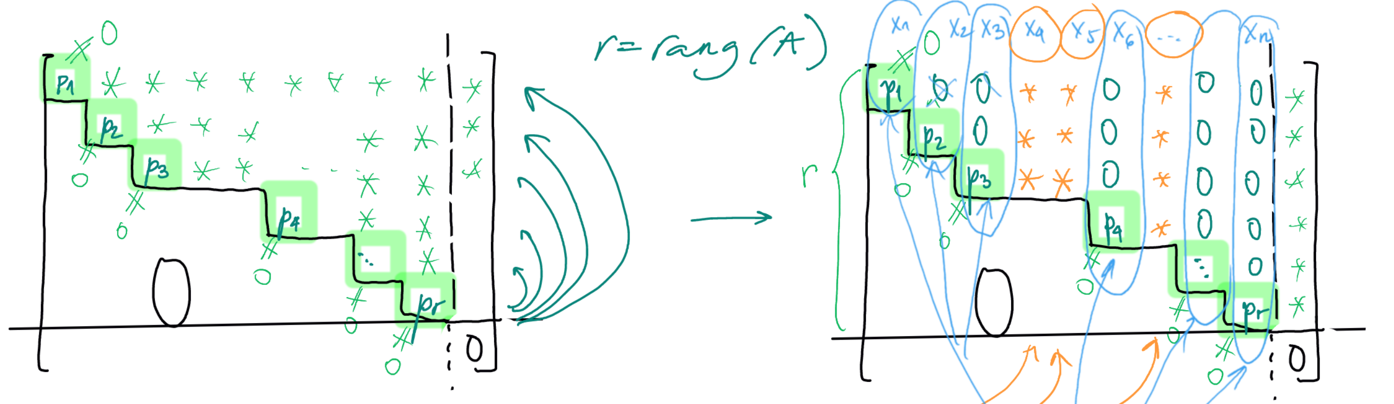
$\mathrm{rang}[A \,\vdots\, \vec{b}] =$
= število pivotov v vrstično stopničasti obliki $[A \,\vdots\, \vec{b}]$
= število neničelnih vrstic v vrstično stopničasti obliki $[A \,\vdots\, \vec{b}]$

Če $\mathrm{rang}\, A < \mathrm{rang}[A \,\vdots\, \vec{b}]$, potem $A\vec{x}=\vec{b}$ NIMA rešitev.

$\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}[A \,\vdots\, \vec{b}]$, potem $A\vec{x}=\vec{b}$ ima rešitev:

a) z vstavljanjem od spodaj navzgor poiščemo rešitev.

b) nadaljujemo in s pivoti in (E1)–(E3) postavimo elemente nad pivoti na 0.
$\leadsto$ REDUCIRANA vrstična stopničasta oblika



v stolpcih, kjer nimamo pivotov, NI nobenih pogojev med temi neznankami: PROSTE NEZNANKE

GLAVNE NEZNANKE (v stolpcih, kjer imamo pivote)

$$\#\text{prostih neznank} = n - \text{rang}(A) = \underbrace{n - r}$$

toliko parametrov se nam bo pojavilo v končni rešitvi.

$\boxed{\text{Primer 3}}$: Rešimo sistem

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2y - 2z &= -4 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}.$$

glavni neznanki: x, y

z prosta neznanka

$$[A \,\vdots\, \vec{b}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{v_3 \leftarrow v_3 - 2v_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{v_2 \leftrightarrow v_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{v_3 \leftarrow v_3 + 2v_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\text{rang}\, A = 2 = \text{rang}\,[A \,\vdots\, \vec{b}]$$

$$\xrightarrow{v_1 \leftarrow v_1 + v_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x + z &= 3 \\ -y + z &= 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad \boxed{\begin{aligned} x &= 3 - z \\ y &= z - 2 \end{aligned} \quad, z \in \mathbb{R}}$$

glavni   prosta

Sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ je **homogen**, če $\vec{b} = \vec{0}$. Homogen sistem je vedno rešljiv.

$A\vec{x} = \vec{0}$

razš. mtr. sistema

$$[A \,\vdots\, \cancel{\vec{0}}] \xrightarrow[\text{Ge.}]{} [C \,\vdots\, \cancel{\vec{0}}]$$

$\vec{x} = \vec{0}$ je rešitev vsakega homogenega sistema — **trivialna rešitev**.