Osnove matematične analize

Enajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

18. december 2020

Nedoločeni integral

Definicija: Funkcija $F : D \to \mathbb{R}$ je **nedoločeni integral** ali **primitivna funkcija** funkcije f na odprtem intervalu D, če za vsak $x \in \mathcal{D}$ velja

$$F'(x) = f(x).$$

Oznaka: $F(x) = \int f(x)\, dx$. Opomba: To je le oznaka nedoločenega integrala, ne pa definicija.

Primer. Ker je $(x^2)' = (5 + x^2)' = 2x$, sta $F_1(x) = x^2$ in $F_2(x) = 5 + x^2$ oba nedoločena integrala funkcije $f(x) = 2x$.

Enoličnost. Nedoločeni integral je določen le do konstante natanko. Če je $F'(x) = f(x)$, potem

- je $(F(x) + C)' = f(x)$ za vse konstante $C \in \mathbb{R}$,
- za vsak nedoločeni integral G funkcije f velja $G(x) = F(x) + C$ za nek $C \in \mathbb{R}$.

  Dokaz. Iz $G'(x) = F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in D$ sledi $(G - F)'(x) = 0$ za vsak $x \in D$. Ker je odvod v vseh točkah 0, je funkcija $G - F$ konstanta na D.

Integrali elementarnih funkcij

$$
\begin{aligned}
\int x^\alpha \, dx &= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1, \\ \log|x| + C, & \alpha = -1, \end{cases} \\
\int \log x \, dx &= -x + x \log x + C, \\
\int e^x \, dx &= e^x + C, \\
\int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\log a} + C, \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \\
\int \tan x \, dx &= -\log \cos x + C, \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C, \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \\
\int \frac{dx}{ax^2+b} &= \frac{\arctan(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}})}{\sqrt{a}\sqrt{b}} + C, \quad a, b > 0.
\end{aligned}
$$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

1. linearnost:

$$\begin{aligned} \int (f(x)+g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \\ \int \alpha f(x)\,dx &= \alpha \int f(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primer (linearnost).

$$\begin{aligned} \int (1-x^2)^2\,dx = \int (1-2x^2+x^4)\,dx &= \int 1\,dx - \int (2x^2)\,dx + \int x^4\,dx \\ &= (x+C_1) - (2\cdot\frac{x^3}{3} + C_2) + (\frac{x^5}{5} + C_3) \\ &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} + C, \end{aligned}$$

kjer so $C_1, C_2, C_3, C \in \mathbb{R}$ konstante.

2. vpeljava nove spremenljivke:

Naj bo $F: D \to \mathbb{R}$ nedoločen integral funkcije $f: D \to \mathbb{R}$, tj.

$$F(x)' = f(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Naj bo $u: D' \to D$ taka odvedljiva funkcija, da je funkcija $F \circ u: D' \to \mathbb{R}$ definirana. Potem je $F \circ u$ nedoločen integral funkcije $(f \circ u)u': D' \to \mathbb{R}$, tj.

$$(F \circ u)'(x) = f(u(x))u'(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Preverba. Velja

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x),$$

kjer smo v prvi enakosti uporabili pravilo za odvajanje kompozituma, v drugi pa dejstvo, da je F nedoločen integral f.

Uporaba.

- Zanima nas $\int f(u(x))u'(x)dx$.
- Denimo, da ne znamo izračunati $\int f(u(x))u'(x)dx$, znamo pa izračunati $\int f(x)dx$.

  Opomba. x v $\int f(x)dx$ in x v $\int f(u(x))u'(x)dx$ nista ista x-a. Sta samo imenovanje spremenljivke funkcije f v prvem primeru oz. funkcije $(f \circ u)u'$ v drugem primeru.
- Če je $F: D' \to \mathbb{R}$ nedoločen integral $\int f(x)dx$, potem je $F \circ u$ nedoločen integral $\int f(u(x))u'(x)dx$.

Primer (nova spremenljivka).

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{2(1+u)}\,du = \frac{1}{2}\log|1+u| + C = \log|1+e^{2x}|^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \log\sqrt{1+e^{2x}} + C,$$

kjer smo v prvi enakosti uvedli spremenljivko $u = e^{2x}$ in upoštevali $du = 2e^{2x}dx$, v zadnji enakosti pa dejstvo, da je $1 + e^{2x} > 1 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

3. integriranje po delih (per partes)

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \tag{1}$$

oziroma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Preverba. Iz pravila za odvod produkta, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, sledi, da je nedoločen integral uv funkcije $(uv)'$ enak

$$(uv)(x) = \int \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,dx$$
$$= \int (u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx.$$

S preoblikovanjem zadnje enakosti dobimo (1).

Primer (per partes).

$$\int xe^{2x}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx$$
$$= x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + C,$$

kjer smo v prvi enakosti uporabili integracijo per partes z $u(x) = x$ in $v'(x) = e^{2x}$. Torej je $u'(x) = 1$ in $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$.

Primer.

$$\int \sqrt{2x-5}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-5)^3} + C,$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali subsitucijo $u = 2x - 5$ in zato $du = 2dx$.

Primer.

$$\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int \cos u\; 2du = 2\sin u + C = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C,$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali subsitucijo $u = \frac{x}{2}$ in zato $du = \frac{dx}{2}$.

Primer.

$$\int \cos^3\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int \left(1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$$
$$= \int \left(1-u^2\right)2du = 2\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + C$$
$$= 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$
$$= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C.$$

kjer smo v drugi enakosti uporabili zvezo $\sin^2 + \cos^2 = 1$, v tretji enakosti pa naredili substitucijo $u = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ in zato velja $du = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{2}$.

Primer.

$$\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos x + 1)\,dx = \frac{1}{2}(\sin x + x) + C,$$

kjer smo v prvi enakosti uporabili zvezo $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$.

Primer.

$$\int \frac{dx}{x+1} = \log|x+1| + C.$$

Primer.

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\,dx$$
$$= -\log|x| + \log|x-1| + C = \log\frac{|x-1|}{x} + C,$$

kjer smo v prvi enakosti naredili razcep na parcialne ulomke.

Primer.

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx$$
$$= \log|x| - \int \frac{du}{2u} = \log|x| - \frac{1}{2}\log|u| + C$$
$$= \log|x| - \log(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C = \log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C,$$

kjer smo v prvi enakosti naredili razcep na parcialne ulomke

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$
$$= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)} \;\Rightarrow\; A = 1, B = -1, C = 0,$$

v drugi enakosti pa substitucijo $u = x^2 + 1$ in zato $du = 2dx$.

Primer.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{x(x^2+2x+2)-2x^2-2x}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \int x\,dx + \int \frac{-2(x^2+2x+2)+2x+4}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \int 2\,dx + \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{du}{u} + \int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \log|u| + 2\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \log|x^2+2x+2| + 2\int \frac{1}{v^2+1}\,dv \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \log|x^2+2x+2| + 2\arctan v + C \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \log(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1) + C,
\end{aligned}$$

kjer smo v četrti enakosti naredili substitucijo $u = x^2+2x+2$ in zato $du = (2x+2)dx$, v šesti pa substitucijo $v = x+1$ in zato $dv = dx$.

Primer.

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2-1)dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$
$$= \arctan x - \int \frac{1}{(1+\tan^2 v)^2} \cdot \frac{dv}{\cos^2 v}$$
$$= \arctan x - \int \cos^4 v \cdot \frac{dv}{\cos^2 v}$$
$$= \arctan x - \int \cos^2 v \; dv = \arctan x - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2v)}{2} + v\right) + C$$
$$= \arctan x - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2\arctan x)}{2} + \arctan x\right) + C,$$

kjer smo v tretji enakosti naredili substitucijo $x = \tan v$ in zato $dx = \frac{1}{\cos^2 v} dv$, v četrti upoštevali identiteto $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ in v šesti upoštevali vrednost $\int \cos^2 v \; dv$, kar se izpelje kot v primeru $\int \cos^2 \frac{x}{2} \; dx$ zgoraj.

Primer.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1} \, dx = \int \frac{du}{u} + \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \log|u| + \arctan x + C,$$
$$= \log\left(x^2+1\right) + \arctan x + C,$$

kjer smo v prvi enakosti uporabili substitucijo $u = x^2 + 1$ in zato $du = 2xdx$.

Primer.

$$\int \log x\, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \log x - x + C,$$

kjer smo uporabili integracijo per partes z $u(x) = \log x$, $v'(x) = 1$ in zato $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x)) = x$.

Primer. $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx.$

Za kasnejšo uporabo označimo $I = \int e^x \sin x\, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \\ &= -e^x \cos x + (e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx) = e^x(\sin x - \cos x) - I + C, \end{aligned}$$

kjer smo v prvi enakosti uporabili integracijo per partes z $u(x) = e^x$, $v'(x) = \sin x$ in zato $u'(x) = e^x$, $v(x) = -\cos x$, v drugi pa integracijo per partes z $u(x) = e^x$, $v'(x) = \cos x$ in zato $u'(x) = e^x$, $v(x) = \sin x$.

Torej je $2I = e^x(\sin x - \cos x) + C$ in zato

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Primer. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Ker je $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1$, mora biti $0 \le x^2 \le 1$ oz. $-1 \le x \le 1$. Zato lahko naredimo substitucijo $x = \cos\varphi$, kjer je $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sledi še $dx = -\sin\varphi \cdot d\varphi$. Zato velja:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= -\int \sqrt{1-\cos^2\varphi} \cdot \sin\varphi \; d\varphi = -\int \sin^2\varphi \; d\varphi \\ &= -\int (1-\cos^2\varphi)\; d\varphi = -\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) + C \\ &= -\frac{\arccos x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\arccos x) + C,\end{aligned}$$

kjer smo v drugi enakosti upoštevali, da je $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in zato $\sin\varphi > 0$, v četrti enakosti pa ponovno uporabili zvezo $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + 1)$.