ALI JE NABOR POLN

Naloga: Pokaži, da nabor $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ ni poln.

Namigi:

(a). Denimo, da imamo izjavni izraz sestavljen samo z uporabo *negacije* in *ekvivalence*. Pokaži, da obstaja enakovreden izjavni izraz oblike

$$\neg(A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow A_3 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n)$$

ali

$$(A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow A_3 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n),$$

kjer so A_i, $i = 1, \ldots, n$, izjavne spremenljivke.

(b). Pokaži, da lahko (glej zakone izjavnega računa) izjavne spremenljivke v takšnem izrazu med sabo poljubno menjavamo. Torej lahko izjavni izraz enakovredno prepišemo v

$$\neg(A_{11} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_{1i_1} \Leftrightarrow A_{2i} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_{2i_2} \Leftrightarrow A_{31} \Leftrightarrow \cdots A_{ki_k})$$

ali

$$(A_{11} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_{1i_1} \Leftrightarrow A_{2i} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_{2i_2} \Leftrightarrow A_{31} \Leftrightarrow \cdots A_{ki_k}),$$

kjer so $A_{j1}, \ldots, A_{ji_j}$ *iste* izjavne spremenljivke.

(c). Premisli, kako lahko poenostavimo $p \Leftrightarrow p$ oziroma $1 \Leftrightarrow p$.

(d). Denimo, da želimo izraziti konjunkcijo spremenljivk p in q: $p \wedge q$. Pokaži naslednjo trditev: Če lahko poiščemo kakršenkoli izjavni izraz $\mathcal{I}$, ki je enakovreden $p \wedge q$, potem lahko poiščemo tudi izjavni izraz $\mathcal{J}$, ki je ravno tako enakovreden $p \wedge q$, uporablja iste izjavne veznike kot $\mathcal{I}$ in sta p in q *edini* izjavni spremenljivki, ki nastopata v $\mathcal{J}$.

(e). Ali lahko izraziš konjunkcijo $p \wedge q$ samo z uporabo *negacije* in *ekvivalence*?

Dokaz (z alternativno metodo):

Naučimo se najprej računati v $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, tj. z ostanki pri deljenju celih števil z dva. Seštevanje, odštevanje in množenje števil iz $\mathbb{Z}_2$ si lahko predstavljamo kot računanje s sodimi in lihimi števili: 0 naj predstavlja *vsa* soda števila, 1 naj predstavlja *vsa* liha števila. Kaj dobimo, če seštejemo dve enici tj. lihi števili?

Oglejmo si *polinome* v spremenljivkah $p, q, \ldots$ s koeficienti iz $\mathbb{Z}_2$. Tudi z njimi lahko računamo:

$$\begin{aligned}
(1+q+p^2)+(1+q) &= \\
(1+1)+p^2+(q+q) &= \\
(1+1)+p^2+(1+1)\cdot q &= \\
0+p^2+0\cdot q &= \\
p^2
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
(1+q)\cdot(1+q) &= \\
(1+q)\cdot 1+(1+q)\cdot q &= \\
(1+q)+(q+q^2) &= \\
1+q^2
\end{aligned}$$

Izjavnim izrazom lahko ravno tako priredimo polinome s koeficienti iz $\mathbb{Z}_2$. Če izjavnemu izrazu A priredimo $P(A)$, potem izjavnemu izrazu $\neg A$ priredimo polinom $P(\neg A) = 1 - P(A)$. Podobno velja $P(A \Leftrightarrow B) = 1 + P(A) + P(B)$. Izjavno spremenljivko p prav tako smatramo za polinom: $P(p) = p$.

Ti polinomi imajo naslednjo lastnost: če želimo izračunati logično vrednost izjavnega izraza A pri izbranem naboru vrednosti logičnih spremenljivk, potem lahko to naredimo tudi tako, da pri tem naboru vrednosti spremenljivk izračunamo vrednost polinoma $P(A)$ (jasno, v $\mathbb{Z}_2$).

Denimo, da v izjavnem izrazu A uporabljamo samo *negacijo* in *ekvivalenco.* Potem je $P(A)$ stopnje največ 1. To pomeni, da izjavne spremenljivke v $P(A)$ ne nastopajo z eksponentom več kot 1 (p^1 lahko nastopa, p^2, p^3,... pa ne), ravno tako v $P(A)$ ne nastopajo produkti različnih izjavnih spremenljivk ($p \cdot q$ ne more nastopati).

$P(p \wedge q) = p \cdot q$, kar je polinom druge stopnje.