Osnove matematične analize

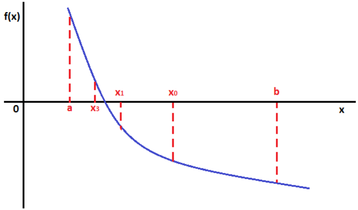
Sedmi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

18. november 2020

Metode za iskanje ničel zveznih funkcij

- **Bisekcija**



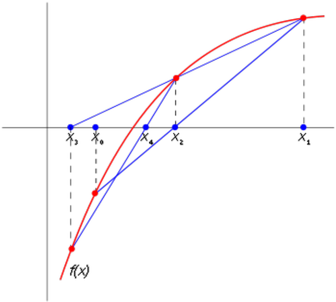
- Izberi začetna približka $a = x_0$ in $b = x_1$, ki zadoščata $f(a)f(b) < 0$.
- Izberi maksimalno število ponovitev M.
- Za $n = 2, 3, 4, \ldots, M$:

$$x_n = \frac{a+b}{2},$$
$$[a, b] = \begin{cases} [a, x_n], & \text{če je } f(a)f(x_n) < 0, \\ [x_n, b], & \text{če je } f(x_n)f(b) < 0. \end{cases}$$

- x_M je približek za ničlo.

Metode za iskanje ničel zveznih funkcij

- **Sekantna metoda**



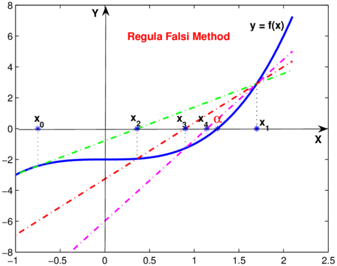
- Izberi začetna približka $a = x_0$ in $b = x_1$.
- Izberi maksimalno število ponovitev M.
- Za $n = 2, 3, 4, \ldots, M$:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}.$$

- x_M je približek za ničlo.

Metode za iskanje ničel zveznih funkcij

▶ **Regula falsi**



- Izberi začetna približka $a = x_0$ in $b = x_1$ tako, da je $f(a)f(b) < 0$, in maksimalno število ponovitev M.
- Za $n = 2, 3, 4, \ldots, M$:

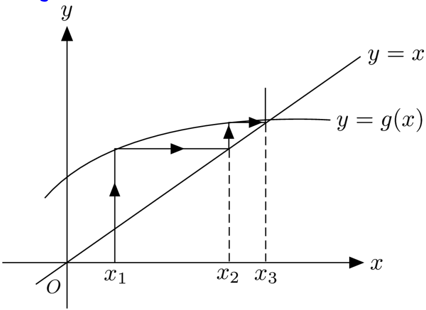
$$x_n = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)},$$

$$[a, b] = \begin{cases} [a, x_n]\,, & \text{če je } f(a)f(x_n) < 0, \\ [x_n, b]\,, & \text{če je } f(x_n)f(b) < 0. \end{cases}$$

- x_M je približek za ničlo.

Metode za iskanje ničel zveznih funkcij

- **Navadna iteracija**



- Poiščemo funkcijo $g(x)$, tako da je ničla α funkcije f njena negibna točka, tj. $g(\alpha) = \alpha$.
- Izberemo začetni približek x_0 in maksimalno število korakov M.
- Za $n = 1, 2, 3, \ldots, M$:

$$x_n = g(x_{n-1}).$$

- Če zaporedje $(x_n)_n$ konvergira, potem je x_M približek za ničlo funkcije f. Konvergenca $(x_n)_n$ je odvisna od odvoda $g'(\alpha)$.

Primer

Rešujemo enačbo $x + \log x = 0$. Eden od smiselnih intervalov je $[0.1, 1]$. Število ponovitev posamezne metode M bo 10. Navadno iteracijo bomo izvajali s funkcijo $g(x) = \frac{-\log x + x}{2}$ in $x_0 = 0.1$.

korak	bisekcija	sekantna	regula falsi	navadna iteracija
1	0.5500	0.7189	0.7189	1.2012
2	0.7750	0.5400	0.6260	0.5089
3	0.6625	0.5693	0.5909	0.5921
4	0.6062	0.5671	0.5768	0.5580
5	0.5781	0.5671	0.5711	0.5706
6	0.5640	0.5671	0.5688	0.5658
7	0.5710	0.5671	0.5678	0.5676
8	0.5675	0.5671	0.5674	0.5669
9	0.5666	0.5671	0.5672	0.5672
10	0.5671	0.5671	0.5671	0.5671

Funkcije več spremenljivk

Funkcija n spremenljivk je predpis:

$$f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

kjer $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ imenujemo definicijsko območje funkcije f.

Primer

Določi definicijska območja naslednjih funkcij:

- $f(x, y) = \sin x + \sin y$
- $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $j(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\Gamma = \{(x, y, f(x, y))\colon (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$ . . . je ploskev v $\mathbb{R}^3$.

Nivojske krivulje in ploskve

Nivojska krivulja (na kratko **nivojnica**) funkcije $f(x, y)$ je krivulja v $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$, podana z enačbo $f(x, y) = c$.

Nivojske ploskve funkcije treh spremenljivk so ploskve v $\mathbb{R}^3$, podane z enačbo $f(x, y, z) = c$.

Limita funkcije dveh spremenljivk

Neformalno: L je limita funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (a, b), če je vrednost $f(x, y)$ poljubno blizu L, če je le (x, y) dovolj blizu (a, b) (a nujno ne enak (a, b)).

Formalno: Število L je **limita** funkcije $f(x, y)$ v točki (a, b), če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, za vsako točko (x, y) v krogu s polmerom δ okrog točke (a, b).
Krog s polmerom δ okrog (a, b) je množica vseh takšnih točk (x, y), da velja

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2.$$

Funkcija $f(x, y)$ je **zvezna** v točki (a, b), če je

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Računanje limit

Primer

Ali obstajajo naslednje limite:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

  Krog s polmerom δ okoli točke $(0,0)$ v polarnih koordinatah zapišemo kot $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kjer $r \in [0,\delta]$ in $\varphi \in [0,2\pi]$. Pogoj $(x,y) \to (0,0)$ se v polarnih koordinatah glasi $r \to 0$. Velja

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} \sin 2\varphi.$$

  Zadnja limita pa ne obstaja, saj izraz sploh ni odvisen od r.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$.

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\sin 2\varphi\cos\varphi = 0.$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

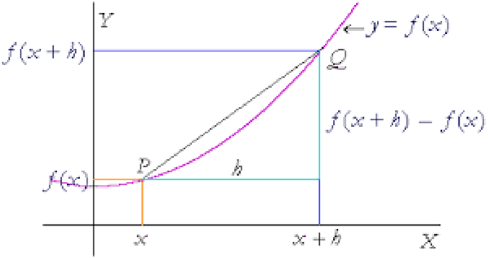
Odvod

Funkcija $f(x)$ naj bo definirana na nekem intervalu okrog točke x_0.

Diferenčni kvocient funkcije f v točki x_0,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

predstavlja relativno spremembo funkcijske vrednosti pri spremembi neodvisne spremenljivke za h.



Diferenčni kvocient je enak smernemu koeficientu sekante na graf skozi točko $(x_0, f(x_0))$ in bližnjo točko $(x_0+h, f(x_0+h))$.

Odvod

Odvod funkcije f v točki x_0 je limita diferenčnega kvocienta

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

če le-ta obstaja. V tem primeru pravimo, da je funkcija f **odvedljiva v točki x_0**.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je **odvedljiva na $\mathcal{D}$**, če je odvedljiva v vsaki točki $x_0 \in \mathcal{D}$.

Izračunaj odvode naslednjih funkcij, kjer obstajajo:

- $f(x) = c$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to \infty} \frac{c - c}{h} = 0.$$

- $g(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to \infty} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + h^n\right) - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right) = n x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Odvod

- $h(x) = \log x$:
$$h'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\log \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} \right)$$
$$= \lim_{t\to 0} \left(\log (1+t)^{\frac{1}{tx_0}} \right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{x_0} \log (1+t)^{\frac{1}{t}} \right)$$
$$= \frac{1}{x_0} \log \left(\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right) = \frac{1}{x_0} \log e = \frac{1}{x_0},$$
kjer smo v predpredzadnji enakosti upoštevali, da je log zvezna, da smo lahko zamenjali lim in log.

- $k(x) = \sin x$.
$$k'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$
$$= \left(\lim_{h\to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0,$$
kjer smo v tretji enakosti upoštevali enakost (za $\alpha = x + \frac{h}{2}$, $\beta = \frac{h}{2}$)
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta.$$

Pomen odvoda

Odvod $f'(x_0)$ je

- **relativna sprememba** vrednosti $f(x_0)$, če se vrednost spremenljivke x_0 malce spremeni
- **hitrost spreminjanja** funkcije f v x_0
- **naklonski koeficient tangente** na graf v točki $(x_0, f(x_0))$

Trditev

Če je f odvedljiva v točki x_0, potem je v x_0 tudi zvezna.

Dokaz.

- Po karakterizacije limit funkcij moramo pokazati, da za vsako zaporedje $(a_n)_n$ z $\lim_n a_n = x_0$ velja $\lim_n f(a_n) = f(x_0)$.
- Definirajmo funkcijo $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Vemo, da velja $\lim_{x\to x_0} g(x) = f'(x_0)$. Po karakterizaciji limit funkcij vemo, da za vsako zaporedje $(a_n)_n$ z $\lim_n a_n = x_0$ velja $\lim_n g(a_n) = \frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0} = f'(x_0)$.
- Ker je $\lim_n(a_n - x_0) = 0$, mora za obstoj $\lim_n g(a_n)$ veljati $\lim_n(f(a_n) - f(x_0)) = 0$. V nasprotnem bi namreč obstajal $\epsilon > 0$ in neko podzaporedje $(a_{n_k})_k$ zaporedja $(a_n)_n$, tako da bi za vsak k veljalo $|f(a_{n_k}) - f(x_0)| > \epsilon$. Toda potem $\lim_k g(a_{n_k})$ ne bi obstajala (števec bi bil po absolutni vrednosti vedno večji od ϵ).

Opomba

Če je f zvezna v točki x_0, potem v x_0 ni nujno odvedljiva. Primer - funkcija $f(x) = |x|$ je zvezna v točki 0, ni pa tam odvedljiva.

Levi odvod $f'_-(x_0)$ funkcije f v točki x_0 je leva limita, **desni odvod** $f'_+(x_0)$ pa desna limita diferenčnega kvocienta

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funkcija je odvedljiva z leve, če obstaja levi odvod, in odvedljiva z desne, če obstaja desni odvod.

Funkcija $f(x) = |x|$ je odvedljiva z leve in z desne v točki $x_0 = 0$, vendar je

$$f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1,$$

zato v tej točki ni odvedljiva.

Pravila za računanje odvodov

Če sta $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji v $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, potem velja

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

  Dokaz. Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje z $\lim_n a_n = x_0$. Velja

  $$\begin{aligned}\lim_n \frac{(f+g)(a_n)-(f+g)(x_0)}{a_n-x_0} &= \lim_n \frac{f(a_n)+g(a_n)-f(x_0)-g(x_0)}{a_n-x_0}\\ &= \lim_n \left(\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0} + \frac{g(a_n)-g(x_0)}{a_n-x_0}\right)\\ &= \lim_n \left(\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}\right) + \lim_n \left(\frac{g(a_n)-g(x_0)}{a_n-x_0}\right)\\ &= f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

  Po karakterizacije limit funkcij z zaporedji velja lasnost odvoda vsote funkcij.

- Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ velja $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, kjer $g(x) \neq 0$
- **Verižno pravilo** za posredno odvajanje funkcij. Če je še $\mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{D}_g$ in je g odvedljiva v $f(x)$, potem velja
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$
Dokaz. Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje z $\lim_n a_n = x_0$. Velja
$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{(g \circ f)(a_n) - (g \circ f)(x_0)}{a_n - x_0} &= \lim_n \frac{g(f(a_n)) - g(f(x_0))}{a_n - x_0} \\
&= \lim_n \left(\frac{g(f(a_n)) - g(f(x_0))}{f(a_n) - f(x_0)} \cdot \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}\right) \\
&= \lim_n \left(\frac{g(f(a_n)) - g(f(x_0))}{f(a_n) - f(x_0)}\right) \lim_n \left(\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}\right) \\
&= g'(f(x_0))f'(x_0).
\end{aligned}$$
Po karakterizacije limit funkcij z zaporedji velja verižno pravilo.
- Če ima f inverzno funkcije in je $f'(x) \neq 0$, potem je
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Še nekaj odvodov elementarnih funkcij

- $f(x) = x^m$, kjer je $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^{|m|}}\right) = \frac{1' x^{|m|} - |m| x^{|m|-1}}{x^{2|m|}} = -|m| \frac{1}{x^{|m|+1}} = m x^{m-1},$$

kjer smo v drugi enakosti uporabili pravilo za odvajanje kvocienta.

- $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, kjer je $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Velja $(f(x))^n = x^m$. Odvajamo obe strani, pri čemer na levi uporabimo pravilo za odvajanje kompozituma:

$$n(f(x))^{n-1} f'(x) = m x^{m-1}.$$

Iz enačbe izrazimo $f'(x)$ in dobimo:

$$f'(x) = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{(f(x))^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{x^{\frac{m(n-1)}{n}}} = \frac{m}{n} x^{\frac{(m-1)n}{n} - \frac{m(n-1)}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

- $f(x) = e^x$.

  Velja $\log(f(x)) = \log(e^x) = x$. Odvajamo obe strani, pri čemer na levi uporabimo pravilo za odvajanje kompozituma:

  $$\frac{1}{f(x)} f'(x) = 1.$$

  Izrazimo $f'(x)$ in dobimo:

  $$f'(x) = f(x) = e^x.$$

- $f(x) = x^\alpha$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

  Zapišimo $f(x) = x^\alpha = e^{\log(x^\alpha)} = e^{\alpha \log(x)}$. Uporabimo pravilo za odvod kompozituma in dobimo:

  $$f'(x) = e^{\alpha \log(x)} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Primeri

Odvajajmo naslednje funkcije:

1. $f_1(x) = \sqrt{x}$

   $f_1'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

2. $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   $f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$

3. $f_3(x) = \arctan \dfrac{1-x}{1+x}$

   $f_3'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2} \frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$

4. $f_4(x) = x^x$

   $f_4'(x) = \left(e^{\log(x^x)}\right)' = \left(e^{x\log(x)}\right)' = e^{x\log(x)}\left(\log(x) + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\log(x)+1).$

5. $f_5(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

   $f_5'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Tabela elementarnih odvodov

f(x)	f'(x)
$x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$a^x,\ a > 0$	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x,\ a > 0$	$\frac{1}{x \log a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot\ x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
$\arcsin\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$