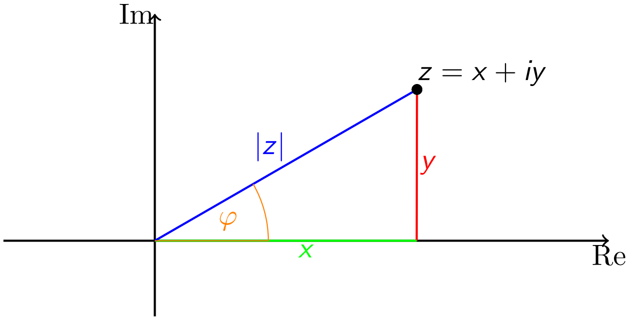
Osnove matematične analize

Drugi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

14. oktober 2020

Polarni zapis kompleksnega števila



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = |z| \cos \varphi$$
$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \qquad y = |z| \sin \varphi$$

Primer

- *Zapišimo* $1 + i$ *ter* $-1 - i$ *v polarni obliki.*
- *Opišimo zgornji zaprt polkrog s kompleksnimi koordinatami.*

Polarni zapis kompleksnega števila

- **Polarni zapis** števila $z = x + iy$ je:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kjer je $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ polarni kot ali argument in je določen samo do mnogokratnika celega kota 2π natanko.

- **Množenje števil v polarnem zapisu**:

$$\begin{aligned} & |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = \; & |z_1||z_2|\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ & \quad + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\big] \\ = \; & \underbrace{|z_1||z_2|}_{\textit{produkt absolutnih vrednosti}} \left(\cos\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\textit{vsota kotov}} + i\sin\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\textit{vsota kotov}}\right) \end{aligned}$$

- **Eulerjeva formula** (trenutno le zapis, kasneje bo sledila iz Taylorjevih vrst):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Polarni zapis kompleksnega števila

Eulerjeva formula poenostavi zapis:

- polarnega zapisa:
$$\mathbf{z} = |\mathbf{z}|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi}.$$

- množenja:
$$\mathbf{z_1 z_2} = |\mathbf{z_1}||\mathbf{z_2}|\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Števila na enotski krožnici zapišemo kot

$$\mathbf{z} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi},$$

kjer je $\varphi \in \mathbb{R}$.

Računanje v polarni obliki

- **Enakost dveh števil**:
$$r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \text{ in } \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi,$$
kjer je $k \in \mathbb{Z}$ neko celo število.
- **Konjugiranje**:
$$\bar{z} = |z| e^{-i\varphi}.$$
- **Potenciranje:**
$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \ldots \quad \textbf{de Moivrova formula}.$$
- **Invertiranje:**
$$z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi},$$
kjer je $z \neq 0$.
- **Deljenje:**
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$
kjer je $z_2 \neq 0$.

Zgledi

- Za $z = 1 - i\sqrt{3}$ narišimo števila z, z^2, z^3, z^4, z^5, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$.
- Izračunajmo ter narišimo $(1+i)(1-i)$.

Geometrija operacij v kompleksni ravnini

$z_0 = |z_0|e^{i\varphi_0}$

Preslikava	transformacija v $\mathbb{C}$
$z \mapsto \overline{z}$	zrcaljenje čez realno os
$z \mapsto z + z_0$	premik za z_0
$z \mapsto e^{i\varphi_0} z$	zasuk okrog izhodišča za kot φ_0
$z \mapsto z_0 z$	razteg (ali krčenje) za $|z_0|$ in zasuk za φ_0
$z \mapsto z^{-1}$	zrcaljenje čez realno os in razteg za $|z|^{-2}$

Primer

V kaj se s predpisom $z \mapsto (1-i)z$ preslika

- krog $|z| \leq 1$,
- območje $\{z \mid |z| \leq 1, \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$,
- kvadrat $|x| + |y| = 1$,