6.3 PODOBNOST MATRIK

Gaussova eliminacija <u>ne</u> ohranja lastnih vrednosti.

Primer: $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

$$\overset{0,2}{A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{0,1}{\begin{bmatrix}\boxed{1}&1\\\boxed{0}&\boxed{0}\end{bmatrix}}=B \qquad \longrightarrow \overset{0,4}{\begin{bmatrix}4&4\\0&0\end{bmatrix}}=C$$

$\operatorname{rang} A = 1 < 2 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ $\qquad$ B je zgg∆ $\Rightarrow$ l.vred B: $1, 0$

$\operatorname{rang}(A-\boxed{2}I) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix} = 1<2 \Rightarrow \lambda_2 = 2$

ali pa

$\lambda_1\lambda_2 = \det A = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_1+\lambda_2 = \operatorname{sled} A = 2 \quad \Leftarrow \lambda_2 = 2$

ali pa

$$\Delta_A(x) = \det\begin{bmatrix}1-x&1\\1&1-x\end{bmatrix} = (1-x)^2-1 = x^2-2x+\cancel{1}-\cancel{1} = x(x-2)=0 \iff x=0 \text{ ali } x=2$$

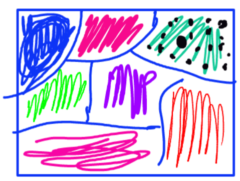
Def: Matriki $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ in $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ sta si podobni, če obstaja neka obrnljiva matrika $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, da

$$A = PBP^{-1}.$$
$$(AP=PB)$$

$$P^{-1}\backslash\ A = PBP^{-1}\ /P \iff P^{-1}AP = \underbrace{P^{-1}P}_{I}B\underbrace{P^{-1}P}_{I} = B \iff B = RAR^{-1}$$
$$(\underset{\text{obrnljiva}}{R}=P^{-1} \Rightarrow P=R^{-1})$$

Za DN: relacija "biti podoben" je ekvivalenčna relacija.

$\mathbb{R}^{n\times n}$



$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $\qquad$ v stand.b. $\quad A_{T,\mathcal{S}}$

$\qquad\qquad\qquad\quad$ v $\mathcal{B}$ $\quad A_{T,\mathcal{B}} = PA_{T,\mathcal{S}}P^{-1}$

Trd: Če sta si matriki $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ in $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ podobni, potem imata isti karakteristični polinom $(\Delta_A(x)=\Delta_B(x))$.

dokaz: Če $A=PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\Delta_A(x) \underset{\text{def karakt. polinoma}}{=} \det(A-xI) \underset{\text{def podobnosti}}{=} \det(PBP^{-1}-x\underset{PP^{-1}}{I}) \underset{\text{trik}}{=} \det(PBP^{-1}-P(xI)P^{-1}) =$$

$$\overset{\text{distr.}}{=} \det(P(BP^{-1}-xIP^{-1})) \overset{\text{distr.}}{=} \det(P(B-xI)P^{-1}) \overset{\text{multiplikativnost det}}{=}$$

$$= \underbrace{\det(P)}_{\in\mathbb{R}}\ \underbrace{\det(B-xI)}_{\substack{\in\mathbb{R}_n[x]\\ =\Delta_B(x)}}\ \underbrace{\det(P^{-1})}_{\in\mathbb{R}} =$$

$$= \underbrace{\det(P)\cdot\det(P^{-1})}_{\det(\underset{I}{PP^{-1}})=1}\cdot\Delta_B(x) = \Delta_B(x).$$

Primer: Obrat ne velja: $A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$$\Delta_A(x)=\begin{vmatrix}-x&0\\0&-x\end{vmatrix}=x^2, \quad \Delta_B(x)=\begin{vmatrix}-x&1\\0&-x\end{vmatrix}=x^2$$

Ali sta si A in B podobni? $P\in\mathbb{R}^{2\times2}$ obrnljiva

$$PAP^{-1}=P\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=A \text{ za } \forall P\in\mathbb{R}^{2\times2}$$

$\Rightarrow$ ne obstaja $P\in\mathbb{R}^{2\times2}$, da bi $PAP^{-1}=B\neq A$.

Posledica: Če sta si A in B podobni, potem:
(1) imata A in B enake lastne vrednosti (skupaj z večkratnostjo)
(2) $\det(A)=\det(B)$
(3) $\mathrm{sled}(A)=\mathrm{sled}(B)$
(4) $\mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(B)$

dokaz: $A=PBP^{-1} \Rightarrow \Delta_A(x)=\Delta_B(x)$ (prejšnji izrek)
$\Rightarrow$ ničle karakt. polinoma A in B se ujemata
$\Rightarrow$ lastne vrednosti A in B se ujemajo $\Rightarrow$ (1)

Ker $\det(A)$ produkt lastnih vrednosti matrike A, sledi (2).
Ker $\mathrm{sled}(A)$ vsota — || — , sledi (3).

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{rang}\, A=\mathrm{rang}(PBP^{-1})\leq\mathrm{rang}(B)\\ \mathrm{rang}\, B=\mathrm{rang}(P^{-1}AP)\leq\mathrm{rang}(A)\end{array}\right\} \overset{(\text{zakaj?})}{\Rightarrow} \mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(B).$$

6.4. DIAGONALIZACIJA MATRIK

Def: Matrika je diagonalizabilna (ali pa "jo je moč diagonalizirati") če je podobna kakšni diagonalni matriki.

(T.j. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je diagonalizabilna natanko tedaj, ko obstajata obrnljiva $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ in diagonalna $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$, da velja $A=PDP^{-1}$.)

Primer: Ni vsaka matrika diagonalizabilna.

$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ Če A diagonalizabilna, bi obstajali $D=\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ obrnljiva

da bi $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}$

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c&d\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a&\beta b\\\alpha c&\beta d\end{bmatrix}$$

$$\alpha c=0=\beta d$$
$$\beta b=d$$

1) če $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha a = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\uparrow$ P obrnljiva

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow\leftarrow$

P obrnljiva

2) če $\alpha \neq 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \beta b = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0 \quad \rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow$ takšni P in D ne obstajata.

$\Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ni diagonalizabilna.

Katere matrike pa so diagonalizabilne?

$A = PDP^{-1}$, P obrnljiva, D diagonalna

Ker so lastne vrednosti matrik A in D enake, je $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, kjer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A.

Potem $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$, kjer $\vec{v}_i$ i-ti stolpec matrike P in

$$AP = PD$$

$$A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix}$$

(Ker P obrnljiva, so $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \neq \vec{0}$)

$$\left.\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda_1\vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 &= \lambda_2\vec{v}_2 \\ &\vdots \\ A\vec{v}_n &= \lambda_n\vec{v}_n \end{aligned}\right\}$$

Vsak stolpec $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ je lastni vektor pri lastni vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Torej: Če $A = PDP^{-1}$, so v matriki D na diagonali l. vrednosti matrike A, v matriki P pa so stolpci l. vektorji matrike A (zapisani v istem vrstnem redu)

Obrat: Če ima A <u>n lin. neodvisnih l. vektorjev</u> $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, potem je matrika $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ polnega ranga in zato obrnljiva. Naj $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ l. vrednosti (v istem vrstnem redu), potem $AP = PD$, in zato

$$A = PDP^{-1},$$

torej A diagonalizabilna.

Izrek: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je diagonalizabilna natanko tedaj, ko lahko iz lastnih vektorjev matrike A sestavimo bazo prostora $\mathbb{R}^n$. (tj. najdemo lahko n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.)

Posledica: Če ima $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ n različnih lastnih vrednosti, je A diagonalizabilna

Primer (od prejšnjega tedna): $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\quad \dim N(A-I) = 1$ $\leftarrow$ 1 lastni vektor

$\lambda_3 = 2$ $\quad \dim N(A-2I) = 1$ $\leftarrow$ 1 lastni vektor

$\Rightarrow$ A ni diagonalizabilna

Primer (tega tedna ☺): Ali je matrika $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ diagonalizabilna?

$$\Delta_B(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 1 \\ 3 & -x^{\oplus} & -3 \\ 1 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} =$$

$$= -x\left((-1-x)^2 - 1\right) =$$

$$= -x\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) =$$

$$= -x\left(x^2 + 2x\right) = -x^2(x+2)$$

$\Delta_B(x) = 0 \iff -x^2(x+2) = 0 \iff x_{1,2} = 0$ ali $x_3 = -2$

Lastni vektorji?

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Kaj je $N(B)$?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{\cdot 3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rang} B = 1 \Rightarrow \dim N(B) = 2$ $\Rightarrow$ 2 lin. neodv. l. vekt. pri l. vred. 0.

$\Rightarrow$ B je diagonalizabilna.

(*) Če diagonalizabilna, določimo še P in D. Vemo $D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.

Kaj so l. vektorji?

Pri $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $\quad -x + z = 0 \Rightarrow z = x \Rightarrow$

$$N(B) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix};\ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

l. vektorja pri l. vrednosti 0.

Pri $\lambda=-2$

$$B+2I=\begin{bmatrix}1&0&1\\3&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{/(-3)}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-6\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\end{array}\qquad \begin{matrix}x+z=0\\y-3z=0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x=-z\\y=3z\end{matrix}$$

$$N(B+2I)=\left\{\begin{bmatrix}-z\\3z\\z\end{bmatrix};z\in\mathbb{R}\right\}=\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow B=PDP^{-1},\text{ kjer }D=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&-2\end{bmatrix},\quad P=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&3\\1&0&1\end{array}\right]\quad(\underline{\text{NI}}\text{ enolična})$$

$\underbrace{}_{0}\ \underbrace{}_{-2}$ $\qquad$ $\underbrace{}_{0}\ \underbrace{}_{-2}$

$$\left(\text{ali pa }P'=\left[\begin{array}{cc|c}0&1&-1\\1&0&3\\0&1&1\end{array}\right],\ P''=\left[\begin{array}{cc|c}0&2&-1\\1&3&3\\0&2&1\end{array}\right]\right)$$

Če je A diagonalizabilna in $A=PDP^{-1}$, potem

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m}=\underbrace{(PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\ldots(\cancel{P}DP^{-1})}_{m}$$

$$=P\underbrace{DDD\ldots D}_{m}P^{-1}=PD^mP^{-1}$$

$\quad$ ← lahko izračunljivo

p polinom: $\quad p(A)=P\,p(D)\,P^{-1}$

6.5 LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI SIMETRIČNIH MATRIK

Naj bo $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika.

Izrek: Lastne vrednosti simetričnih matrik so realne.

dokaz: Sedaj se moramo prestaviti v $\mathbb{C}$:

$\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^n$

$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ / konjugiramo:

$A\overline{\vec{v}}=\overline{\lambda}\overline{\vec{v}}$

$\overline{\vec{v}}^T\vec{v}=\overline{v_1}v_1+\ldots+\overline{v_n}v_n$
$=|v_1|^2+\ldots+|v_n|^2$
posplošitev skalarnega produkta na $\mathbb{C}$

$\overline{\vec{v}}^TA\vec{v}=\lambda\overline{\vec{v}}^T\vec{v}$

$\vec{v}^TA\overline{\vec{v}}=\overline{\lambda}\vec{v}^T\overline{\vec{v}}$ $\quad /^T$

$\overline{\vec{v}}^TA\vec{v}=\overline{\lambda}\overline{\vec{v}}^T\vec{v}$

$(\lambda-\overline{\lambda})\underbrace{\overline{\vec{v}}^T\vec{v}}_{\in\mathbb{R}}=0$ $\qquad\Rightarrow\lambda=\overline{\lambda}\Rightarrow\lambda\in\mathbb{R}$

$\neq0$ saj $\vec{v}\neq\vec{0}$

Izrek: Lastni vektorji simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so pravokotni.

In (brez dokaza): $\dim N(A-\lambda I)=$ stopnji l. vrednosti λ v karakt. polinomu.

($\Rightarrow$ za k-kratno l. vrednost lahko najdemo k ortog. l. vektorje dokaz: Naj $\lambda \neq \mu$ in $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ in $A\vec{y}=\mu\vec{y}$, $\vec{x},\vec{y}\neq\vec{0}$

Poračunajmo
$$(\lambda-\mu)\vec{x}^T\vec{y} = \lambda\vec{x}^T\vec{y} - \mu\vec{x}^T\vec{y} = (\lambda\vec{x})^T\vec{y} - \vec{x}^T(\mu\vec{y}) = (A\vec{x})^T\vec{y} - \vec{x}^T(A\vec{y}) = \vec{x}^TA^T\vec{y} - \vec{x}^TA\vec{y} = \vec{x}^TA\vec{y} - \vec{x}^TA\vec{y} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda-\mu)}_{\neq 0}(\vec{x}^T\vec{y})=0 \Rightarrow \vec{x}^T\vec{y}=0 \Rightarrow \vec{x}\perp\vec{y}$$

DN (neobvezna): $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Obstajata takšna zg $\triangle$ mtr T, ki ima na diagonali lastne vrednosti matrike A, in takšna ortogonalna matrika Q, da velja
$$A = QTQ^{-1} = QTQ^T$$

(Schurov izrek)

Posledica: $A=A^T$ (A simetrična):
$$A = QTQ^T \quad /^T$$
$$A^T = (QTQ^T)^T = QT^TQ^T$$
$$\Rightarrow Q^T \backslash\, QTQ^T = QT^TQ^T \,/\, Q$$
$$T = T^T$$
$$\Rightarrow T \text{ diagonalna}$$

A simetrična matrika $\Rightarrow$ $A=QDQ^T$, kjer D diagonalna (iz l.vredn. A)
Q ortogonalna (iz l.vekt. A)

Posledica: A simetrična $\Rightarrow$ A ima n ortogonalnih l.vektorjev.

Če $A=A^T$ in $A=QDQ^T$, $D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}| & | & & | \\ \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow\end{bmatrix}$ $\quad$ $\{\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_n\}$ ONB $\mathbb{R}^n$, $\vec{q}_i$ l.vektorji A, λ_i l.vrednosti A

$$\Rightarrow A = QDQ^T = \begin{bmatrix}| & & | \\ \vec{q}_1 & \cdots & \vec{q}_n \\ \downarrow & & \downarrow\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}- \vec{q}_1^T \to \\ \vdots \\ - \vec{q}_n^T \to\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix}| & | & & | \\ \lambda_1\vec{q}_1 & \lambda_2\vec{q}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{q}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow\end{bmatrix}\begin{bmatrix}- \vec{q}_1^T \to \\ \vdots \\ - \vec{q}_n^T \to\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{A = \lambda_1\vec{q}_1\vec{q}_1^T + \lambda_2\vec{q}_2\vec{q}_2^T + \dots + \lambda_n\vec{q}_n\vec{q}_n^T}$$ Spektralni razcep simetrične matrike A

Kaj je $\vec{q}_1\vec{q}_1^T$? $n\times n$ matrika, ki pripada projekciji na $\mathcal{L}\{\vec{q}_1\}$, je matrika ranga 1.
$\vec{q}_1\in\mathbb{R}^{n\times 1}$