6. LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

6.1. DEFINICIJA

Odslej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ← kvadratna!

Def: Če za neničelni vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ in za $\lambda \in \mathbb{C}$ velja

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

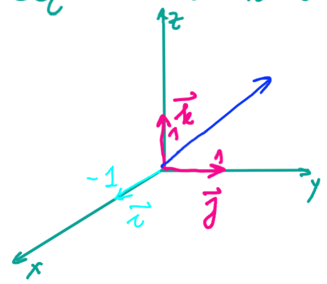
imenujemo $\vec{x}$ lastni vektor matrike A, λ pa lastna vrednost A.

Primer: Naj bo $Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrika, ki ustreza zrcaljenju čez ravnino $x=0$.

$Z: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zrcaljenje

$\vec{x} \longmapsto Z\vec{x}$

$$Z\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Kakšne so l. vrednosti/vektorji Z?

$Z\vec{j} = \vec{j} = 1\cdot\vec{j}$ (ker $\vec{j}$ na ravnini $x=0$)

$Z\vec{k} = \vec{k} = 1\cdot\vec{k}$ ($\vec{k}$ —||—)

$Z\vec{i} = -\vec{i} = (-1)\vec{i}$ ($\vec{i} \perp$ ravnina $x=0$)

$\Rightarrow$ $\vec{i}$ l. vektor Z pri l. vrednosti -1.

$\vec{j}, \vec{k}$ l. vektorja Z —||— 1 (celo vsak $\alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$ je l. vekt. pri l. vrednosti 1)

Lastnosti: ① Množica lastnih vektorjev A pri lastni vrednosti λ je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. = lastni podprostor za λ

($\vec{x}, \vec{y}$ lastna vekt pri l. vrednosti λ: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $A\vec{y} = \lambda\vec{y}$

$\Rightarrow A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} = \alpha(\lambda\vec{x}) + \beta(\lambda\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})$

$\Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ je l. vektor A pri l. vrednosti λ.)

② Če za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $\operatorname{rang}(A) \leq n-1$, $\dim N(A) \geq 1$. Izberemo neničelni $\vec{x} \in N(A)$: $A\vec{x} = \vec{0} = 0\cdot\vec{x}$. $\Rightarrow$ $\vec{x}$ je lastni vektor A pri l. vrednosti 0.

$\Rightarrow N(A)$ je l. podprostor A pri l. vrednosti 0.

6.2 RAČUNANJE LASTNIH VREDNOSTI IN VEKTORJEV

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Če poznamo l. vrednost λ matrike A, potem iščemo $\vec{x} \neq \vec{0}$, da velja $\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}$

$\Leftrightarrow A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{x} \in N(A - \lambda I)}$

Lastni vektorji A pri l. vrednosti λ so vektorji v $N(A - \lambda I)$.

Lastni podprostor A pri l. vrednosti λ je $N(A-\lambda I)$.

2. Kako poračunamo l. vrednosti?

Če λ lastna vrednost, je $N(A-\lambda I) \neq \{\vec{0}\}$, torej $\operatorname{rang}(A-\lambda I) < n$, torej $\det(A-\lambda I)=0$. Velja tudi obrat.

$$\boxed{\lambda \text{ je l. vrednost } A} \iff \boxed{\det(A-\lambda I)=0}$$

Kaj je $A-\lambda I$? A po diagonali odštejemo λ.

Definiramo $\Delta_A(x) = \det(A - xI)$ polinom stopnje n

$\llcorner$ karakteristični polinom matrike A

Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma.

($\Rightarrow$ imamo n (morda kompleksnih) lastnih vrednosti)

Primer: $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$. Poiščimo l. vrednosti in l. vektorje matrike A.

1. Lastne vrednosti:

$$\Delta_A(x) = \det(A-xI) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 2 & -5 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$= -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -5 & 4-x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$= -x \big(\underbrace{-x(4-x)+5}_{x^2-4x+5}\big) + 2 = -x^3+4x^2-5x+2 = -(x-1)(x^2-3x+2) =$$

$$= -(x-1)(x-2)(x-1) =$$

$$= -(x-1)^2(x-2)$$

$\Delta_A(x)=0 \iff x_{1,2}=1, \quad x_3=2$

2. lastni vektorji

2.1. $\lambda_1=\lambda_2=1$ Lastni podprostor $= N(A-I) = ?$

$$A-I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[v_3 \leftarrow v_3+2v_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\uparrow$ rang $=2$

$-x+y=0$
$-y+z=0$

$y=z$, $x=y=z$

$$N(A-I) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

l. vekt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.2. $\lambda_3 = 2$ Lastni podprostor $= N(A-2I) = ?$

$$A-2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{+} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$-2x+y=0$
$-2y+z=0$

$z = 2y$, $y = 2x$ ⇒ $z = 4x$

$\operatorname{rang}(A-2I) = 2$

$$N(A-2I) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Recept: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Izračunamo $\Delta_A(x) = \det(A - xI)$ (karakt. polinom matrike A)
   - polinom je stopnje n
   - vodilni koeficient $(-1)^n$
   - prosti koeficient je enak $\det(A)$
2. Izračunamo ničle $\Delta_A(x)$ (l. vrednosti matrike A)
   - n kompleksnih lastnih vrednosti
   - v konjugiranih parih
3. Za vsako lastno vrednost λ izračunamo $N(A-\lambda I)$ (l. podprostor pri λ)
   - če $\lambda \in \mathbb{R}$, potem so l. vektorji realni
   - Koliko l. vektorjev? ∞
   - Koliko l. neodv. l. vektorjev pri l. vrednosti λ?
     $1 \le \dim N(A-\lambda I) \le$ stopnja ničle λ v $\Delta_A(\lambda)$

Izrek: Lastni vektorji, ki pripadajo različnim l. vrednostim, so linearno neodvisni.

(dokaz v primeru, ko $\vec{x}, \vec{y}$: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $A\vec{y} = \mu\vec{y}$, $\lambda \ne \mu$, $\vec{x} \ne \vec{0}, \vec{y} \ne \vec{0}$

Želimo pokazati, da sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ lin. neodvisna.

Denimo, da $A \backslash \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{0}$ ⇒ $\beta\vec{y} = -\alpha\vec{x}$

$$\alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} = \vec{0} \quad \text{(l. vekt.)}$$
$$\alpha(\lambda\vec{x}) + \beta(\mu\vec{y}) = \vec{0}$$
$$\alpha\lambda\vec{x} + \beta\mu\vec{y} = \vec{0}$$
$$\alpha\lambda\vec{x} + \mu(-\alpha\vec{x}) = \vec{0}$$
$$\alpha(\lambda-\mu)\vec{x} = \vec{0} \qquad (\text{ker } \vec{x} \ne \vec{0})$$
$$\alpha\underbrace{(\lambda-\mu)}_{\ne 0} = 0 \qquad (\lambda \ne \mu)$$

$\alpha = 0 \Rightarrow \beta\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \vec{x}$ in $\vec{y}$ lin. neodv.)

Posledica: Če ima A n različnih l. vrednosti, potem lahko sestavimo bazo $\mathbb{R}^n$ iz lastnih vektorjev matrike A.

Še nekaj lastnosti lastnih vrednosti:

1) Naj bo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$ zgornje trikotna matrika.

$$\Delta_A(x) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-x & & * \\ & a_{22}-x & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn}-x \end{bmatrix} = (a_{11}-x)(a_{22}-x)\dots(a_{nn}-x)$$

$\Delta_A(x) = 0 \iff x = a_{11}, a_{22}, \dots$ ali a_{nn}

$\boxed{\text{Lastne vrednosti zg}\triangle\text{ mtr. so natanko njeni diagonalni elementi.}}$

$\boxed{\text{Lastne vrednosti sp}\triangle\text{ mtr. so natanko njeni diagonalni elementi.}}$

$\boxed{\text{Lastne vrednosti diagonalne mtr. so natanko njeni diagonalni elementi.}}$

2) Velja $\det(A-xI) = \det\left((A-xI)^T\right) = \det(A^T - xI)$, zato
$\Delta_A(x) = \Delta_{A^T}(x)$

$\Rightarrow$ Matriki A in A^T imata iste lastne vrednosti.

3) $\Delta_A(x) = \det(A-xI) \overset{\text{fakt.}}{=} (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$

$x=0$:

$$\det(A) = (-1)^n(-\lambda_1)(-\lambda_2)\dots(-\lambda_n) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Produkt lastnih vrednosti je enak } \det A.}$

4) $$\Delta_A(x) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & a_{nn}-x \end{bmatrix} \overset{\text{fakt.}}{=} (-1)^n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$$

koeficient pred x^{n-1}

$$\cancel{(-1)^{n-1}}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}) = \overset{-\cancel{(-1)^{n-1}}}{\overset{\|}{(-1)^n}}(-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n)$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n = a_{11}+\dots+a_{nn} \quad (=\text{sled}(A))$$

$\boxed{\text{Vsota lastnih vrednosti je enaka sledi matrike } A.}$

Primer: Za 2×2 matrike lahko iz pogojev

$$\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}=\text{sled}(A)$$
$$\lambda_1\lambda_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\det(A)$$

enostavno izračunamo lastni vrednosti.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -6 & 2\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}&\text{sled}(A)=1+2=3\\ &\det(A)=1\cdot 2-(-6)(-1)=-4\end{aligned}$$

$$\lambda_1+\lambda_2=3 \quad\to\quad \lambda_2=3-\lambda_1$$
$$\lambda_1\lambda_2=-4$$
$$\lambda_1(3-\lambda_1)=-4$$
$$\lambda_1^2-3\lambda_1-4=0$$
$$(\lambda_1-4)(\lambda_1+1)=0$$

$\lambda_1=4,\ \lambda_2=-1$ ali obratno

ali pa

$$\Delta_A(x)=\begin{vmatrix}1-x & -1\\ -6 & 2-x\end{vmatrix}=(1-x)(2-x)-6=x^2-3x-4$$

$\Delta_A(x)=0 \iff x=4$ ali $x=-1 \Rightarrow$ l.vrednosti: $4,-1$

5) Naj λ lastna vrednost matrike A. Obstaja $\vec{0}\neq\vec{x}$, da $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$.

$$A^m\vec{x}=A^{m-1}(\underbrace{A\vec{x}}_{\lambda\vec{x}})=A^{m-1}(\lambda\vec{x})=\lambda A^{m-1}\vec{x}=\lambda^2A^{m-2}\vec{x}=\dots=\lambda^m\vec{x}$$

$\Rightarrow A^m\vec{x}=\lambda^m\vec{x} \Rightarrow A^m$ ima l.vrednost λ^m.

6) Naj λ lastna vrednost obrnljive matrike A.

$$A^{-1}\backslash\ A\vec{x}=\lambda\vec{x},\quad \vec{x}\neq\vec{0}$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\vec{x}=A^{-1}\lambda\vec{x}$$
$$\vec{x}=\lambda(A^{-1}\vec{x}) \ \Big/ : \lambda \neq 0 \ (*)$$

ALI LAHKO ?

$$\frac{1}{\lambda}\vec{x}=A^{-1}\vec{x}$$
$$A^{-1}\vec{x}=\frac{1}{\lambda}\vec{x}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{\lambda} \text{ je lastna vrednost matrike } A^{-1}.}$

(*) Ali je $\lambda=0$ lahko l.vrednost obrnljive matrike A?

Če $A\vec{y}=0\vec{y}$ za $\vec{y}\neq\vec{0}$, potem

$\Rightarrow A\vec{y}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{y}\in N(A)=\{0\}$ (A je obrnljiva) $\to \vec{y}=\vec{0} \to\leftarrow$

NE.

$\boxed{0 \text{ } \underline{\text{NI}} \text{ l.vrednost obrnljive matrike.}}$