Linearna algebra **8. in 9. teden**

Ortogonalnost

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Napovednik 4. poglavja: Ortogonalnost.
- Uvod
  - Ponovite skalarni produkt z ogledom 3Blue1Brown, scalar product.
  - Za definicijo pravokotnosti/ortogonalnosti potrebujemo skalarni produkt. Primeri skalarnih produktov, ki jih boste kdaj potrebovali: video.
- Definicije *pravokotnih/ortogonalnih* vektorjev, *ortogonalne množice* vektorjev, *ortonormirane množice* vektorjev, video.
  - Vsaka ortogonalna množica vektorjev je linearno neodvisna. video.
  - ↯ Naloga 1: Ali je množica vektorjev

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

    ortonormirana množica v $\mathbb{R}^4$?
- *Ortonormirana baza*
  - Definicija in lastnosti, video
  - Primer:
    (a.) Ali je množica vektorjev $\mathcal{M}$ iz naloge 1 ortonormirana baza $\mathbb{R}^4$?
    (b.) Ali lahko poiščete množico $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^4$, ki bo tvorila ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ in bo sestavljena iz večkratnikov vektorjev množice $\mathcal{M}$?
    (c.) Zapišite vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{N}$.

    (Ko rešite, lahko preverite rešitev tu.)
  - ↯ Naloga 2: Naj bo $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_5}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^5$ in $\vec{x} = \alpha_1\vec{v_1} + \ldots + \alpha_5\vec{v_5}$. Pokažite, da je $||\vec{x}||^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_5^2$.
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ imenujemo *ortogonalna matrika*, če je $Q^\top Q = I_n$.
  - ↯ Naloga 3: Če je $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortogonalna matrika, potem pokažite, da je

$$||Q\vec{x}|| = ||\vec{x}||$$

    za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- *Gram-Schmidtov postopek* za ortogonalizacijo vektorjev:
  - Ideja
  - Postopek

- Gram-Schmidtov postopek je odvisen od vrstnega reda vektorjev. Oglejte si primer in še enkrat isti primer z menjavo vrstnega reda vhodnih vektorjev.
- ↯ Naloga 4: Naj bo

$$V = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

  Poiščite kakšno ortonormirano bazo prostora V. (Najprej z metodo ostrega pogleda ugotovite, v kakšnem vrstnem redu boste izvajali Gram-Schmidtov postopek.)
- Igrajte se z Wolframovo demonstracijo.

• *QR razcep* matrike
  - Razcep, video.
  - Primer: Poiščite QR razcep matrike $A = \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. (Rešitev.)
  - Nadaljnje variante QR razcepa, video.

• *Ortogonalni komplement*
  - Definicija
  - ↯ Naloga 5: Pokažite, da je ortogonalni komplement $U^\perp$ vektorskega podprostora $U \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$.
  - Lastnosti
  - Ortogonalna zveza med ničelnim in stolpčnim prostorom matrike
  - ↯ Naloga 6: Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times(n+k)}$ matrika ranga r, $r \leq n$, $k \geq 0$. Določite dimenzije prostorov $C(A)$, $C(A^\top)$, $C(A)^\perp$, $N(A)$, $N(A^\top)$ in $N(A)^\perp$.

• Matrika projekcije, video.
  - Primer: Dana je ravnina $\Sigma : x+y+2z = 0$ v $\mathbb{R}^3$. Zapišite matriko P, ki pripada pravokotni projekciji na Σ v standardni bazi. Lahko sledite naslednjim korakom:
    (1) Izberite ortonormirano bazo $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ ravnine Σ. (Če ne znate uganiti, izberite poljubna linearno neodvisna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ na ravnini Σ in na njima uporabite Gram-Schmidtov postopek.)
    (2) Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ matrika s stolpcema $\vec{w}_1$ in $\vec{w}_2$.
    (3) Matrika projekcije na Σ je $P = QQ^\top$.

    (Če se vam v kakšnem koraku zatakne, lahko pogledate pomoč. Pri tem ne sledite slepo moji izbiri vektorjev. Ne glede na to, kako boste izbrali začetna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, bi morali na koncu priti do iste matrike P. Poskusite.)

• *Predoločeni sistemi*
  - Kaj so sploh predoločeni sistemi? video.
  - Najboljši približek rešitve predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov, video.
  - Poglejte si lepšo in gibljivo sliko, kaj je najboljši približek predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov. Wolfram Demonstrations Project.

- Primer: Določite premico v $\mathbb{R}^2$, ki se najbolj prilega točkam $A(1,1)$, $B(0,0)$, $C(2,0)$ in $D(-1,2)$. (Rešitev.)
- Kaj pa v primeru, ko je predoločeni sistem podan z matriko polnega ranga? video.

- Zapiski predavanj, 8. in 9. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 4
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 4.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
  (a) Lecture 14: Orthogonal vectors and subspaces.
  (b) Lecture 15: Projections onto subspaces.
  (c) Lecture 16: Projection matrices and least squares.
  (d) Lecture 17: Orthogonal matrices and Gram-Schmidt

3. Ali razumem snov?

$\lightning$ (1) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takšna matrika, da velja $\dim N(A) = \dim N(A^\top)$. Pokažite, da velja $m = n$.
$\lightning$ (2) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
  (a) Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.
  (b) Za simetrično matriko A velja $N(A) = C(A)^\perp$.
  (c) Če ima za neka $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešitev, potem je vektor $\vec{b}$ pravokoten na vsak vektor $\vec{y} \in N(A^\top)$.
  (d) Vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ je ortogonalni komplement vektorskega prostora $W \subseteq \mathbb{R}^n$, če je vsak vektor iz V pravokoten na vsak vektor iz W.
  (e) Če je P matrika, katere stolpci so paroma ortogonalni, velja $P^{-1} = P^T$.
  (f) Če je neničelni vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ na vektorski podprostor $U \subset \mathbb{R}^n$, potem sta vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna.
  (g) Če so stolpci matrike $U \in \mathbb{R}^{n\times r}$ normirani vektorji in tvorijo ortogonalno množico, potem je UU^T pravokotna projekcija vektorja $\vec{x}$ na $C(U)$.
  (h) Če je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, kjer $m > n$, potem linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.
  (i) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ranga n in $m \geq n$, potem je najboljša rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ po metodi najmanjših kvadratov enaka $\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$.
(3) Dani sta matriki

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ in } Z_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

ϟ (a) Pokažite, da sta matriki A in B ortogonalni za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$.
ϟ (b) Kaj predstavljata linearni preslikavi $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}, \mathcal{Z}_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, podani z

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) = R_{\frac{\pi}{2}}\vec{x} \text{ in } \mathcal{Z}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) = Z_{\frac{\pi}{2}}\vec{x}\,?$$

⋆ (c) Kaj predstavljata linearni preslikavi $\mathcal{R}_{\varphi}, \mathcal{Z}_{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, podani z

$$\mathcal{R}_{\varphi}(\vec{x}) = R_{\varphi}\vec{x} \text{ in } \mathcal{Z}_{\varphi}(\vec{x}) = Z_{\varphi}\vec{x}\,?$$

ϟ (4) Zapišite primer matrike, ki ima paroma ortogonalne stolpce, vendar ni ortogonalna matrika.

⋆ (5) Na vektorskem prostoru $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ zveznih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi]$ definirajmo predpis

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \tag{1}$$

ki funkcijama f in g vrne število $\langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$.

(a) Pokažite, da je
   (i) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$,
   (ii) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$,
   (iii) $\langle f, f \rangle \geq 0$ ter
   (iv) da je $\langle f, f \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je f ničelna funkcija.

   S tem ste pokazali, da je predpis (1) skalarni produkt na prostoru zveznih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Dolžino funkcije f definiramo kot

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx}$$

   norma (ali dolžina) funkcije f. Označimo funkcije

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ f_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(ix) \\ g_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(ix) \end{aligned}$$

   za $i = 1, 2, \ldots$.

(c) Pokažite, da je
   (i) $\langle f_i, f_i \rangle = 1$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$,
   (ii) $\langle g_i, g_i \rangle = 1$ za $i = 1, 2, \ldots$,
   (iii) $\langle f_0, f_i \rangle = 0$ za $i = 1, 2, \ldots$ in
   (iv) $\langle f_i, g_j \rangle = 0$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$ ter $j = 1, 2, \ldots$.

   S tem ste pokazali, da so funkcije $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots\}$ ortonormirana množica v $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$. Ta igra pomembno vlogo pri Fourirjevih vrstah in transformacijah.

ϟ (6) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, 6. poglavje.

(Naloge, označene s $\lightning$ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloge, označene s $\star$, dopolnjujejo obravnavano snov in širijo vaše znanje.)