PRIMERI POGOSTIH MATEMATIČNIH NAPAK

Poišči vse napake v spodnjih točkah.

(1) Naj bodo $x, y, r \in \mathbb{R}$. Potem velja:

(a) $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = x + y$.

(b) $x^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2} = \sqrt{r^2} \;\Leftrightarrow\; x = r.$.

(2) Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}$. Potem velja $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

(3) Okrajšajmo ulomek (če je možno)

$$\frac{(3x+7)(2x-9)+(x^2+1)}{(3x+7)(x^3+6)}.$$

Rešitev:

$$\frac{(3x+7)(2x-9)-(x^2+1)}{(3x+7)(x^3+6)} = \frac{(2x-9)-(x^2+1)}{x^3+6} = \frac{-x^2+2x-8}{x^3+6}.$$

(4) Naj bo p praštevilo. Celoštevilske rešitve $x, y \in \mathbb{Z}$ poiščemo na naslednji način:

$$x^2 - y^2 = p \;\Leftrightarrow\; (x+y)(x-y) = p \;\Leftrightarrow\; x+y = p \text{ in } x - y = 1.$$

(5) Naj bosta $a, b > 0$ pozitivni števili. Velja:

(a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

(b) $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$.

(6) Za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$ velja:

(a) $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

(b) $\log(a-b) = \frac{\log a}{\log b}$.

(7) Za vsak $x > 0$ velja:

(a) $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$.

(b) $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$.

(8) Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja:

(a) $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 1}{\cos 1} = \tan 1$.

(b) $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$.

(c) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\sin x \cos x = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin 2x = 1 \;\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4}$.

(d) $\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 + \cos^2)(x) = 1x = x$.

(e) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

(9) Naj bo $k \in \mathbb{Z}$ poljuben: Velja:

(a) $\dfrac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$.

(b) $\dfrac{d}{dx}x^x = xx^{x-1} = x^x$.

(10) Velja:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x$.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \ln(1+x^2)$.

(11) Reši enačbo $\dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{x^2-4}$.
Rešitev:

$$
\begin{aligned}
& \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-4} \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2-4)(x-2) = (x^2-1)(x+1) \\
\Leftrightarrow\quad & x^3-2x^2-4x+8 = x^3+x^2-x-1 \\
\Leftrightarrow\quad & 3x^2+3x-9 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 3(x^2+x-3) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}.
\end{aligned}
$$

(12) Reši enačbo $\dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{x+1}{x^2-1}$.
Rešitev:

$$
\begin{aligned}
& \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x+1}{x^2-1} \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2-1)(x-2) = (x^2-4)(x+1) \\
\Leftrightarrow\quad & x^3-2x^2-x+2 = x^3+x^2-4x-4 \\
\Leftrightarrow\quad & 3x^2-3x-6 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 3(x-2)(x+1) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x_1 = 2, x_2 = -1.
\end{aligned}
$$

(13) Reši enačbo $\sqrt{2x+12} - 2 = x$.
Rešitev:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2x+12} - 2 = x \quad & \Leftrightarrow \quad \sqrt{2x+12} = x+2 \ \Leftrightarrow\ 2x+12 = x^2+4x+4 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2+2x-8 = 0 \ \Leftrightarrow\ (x-4)(x+2) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x_1 = 4, x_2 = -2.
\end{aligned}
$$

(14) Reši enačbo $e^{x^2} - e^x = 0$.
Rešitev:

$$
\begin{aligned}
e^{x^2} - e^x = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - e^x = 0 \ \Leftrightarrow\ e^x(e^x-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ e^x = 0 \text{ ali } e^x = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad x = \ln(0) \text{ ali } x = \ln(1) = 0.
\end{aligned}
$$

(15) S pomočjo matematične indukcije dokaži, da velja:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rešitev:
Baza indukcije - $n = 1$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$

Indukcijski korak: Velja

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{*}$$

Dokazujemo, da velja

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Prištejmo $2n+1$ obema stranema (*). Dobimo

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 2n + 1 = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Dokaz je končan.

Poiščimo realne rešitve spodnjih enačb:

(1) $x^2 - x + 6 = 0$.

(2) $x^4 - x^2 + 6 = 0$.

(3) $x - \sqrt{x} + 6 = 0$.