

# Iskanje presečišč dveh parametrično podanih krivulj

Imamo krivulji  $K$  in  $L$  v ravnini  $\mathbb{R}^2$ . Poiskati želimo vse točke, v katerih se ti dve krivulji sekata. Naj bosta  $\mathbf{p}(t)$  in  $\mathbf{q}(u)$  pripadajoči parametrizaciji teh krivulj, prva na intervalu  $I = [a, b]$ , druga na intervalu  $J = [c, d]$ .

Presečišča poišči z naslednjim postopkom:

1. Intervala  $I$  in  $J$  razdeli na podintervale dolžine  $h$ , kjer je  $h > 0$  primerno majhen.
2. Krivulji  $K$  in  $L$  aproksimiraj z lomljenkama  $K'$  in  $L'$ , kjer so zaporedne točke na lomljenki ravno vrednosti parametrizacije v izbranih delilnih točkah intervala  $I$  oziroma  $J$ . Poišči presečišča teh lomljenk.
3. Iz presečišč lomljenk izračunaj približka za vrednosti parametrov, pri katerih se  $K$  in  $L$  sekata. Ta približka uporabi kot začetni približek za Newtonovo iteracijo, da poiščeš (precej) bolj natančne koordinate presečišč.

Za Newtonovo iteracijo boš potreboval tudi odvoda parametrizacij,  $\dot{\mathbf{p}}$  in  $\dot{\mathbf{q}}$ .

## Naloga

1. Poiskati vsa presečišča krivulj s parametrizacijama  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{q}$  pomeni poiskati vse rešitve enačbe  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(u)$ . Recimo, da je točka  $P'(x_i, y_i)$  eno od presečišč lomljenk  $K'$  in  $L'$ . Kako bi smiselno izbral vrednosti parametrov  $t_i^{(0)}$  in  $u_i^{(0)}$ , da bi bil  $\mathbf{x}_i^{(0)} = [t_i^{(0)}, u_i^{(0)}]^\top$  karseda ugodna izbira za začetni približek Newtonove iteracije? (Torej tisti  $\mathbf{x}_i^{(0)}$ , ki konvergira k rešitvi  $\mathbf{x}_i = [t_i, u_i]$ , za katero je  $\mathbf{p}(t_i) = \mathbf{q}(u_i)$  ravno krajevni vektor presečišča  $P$ , ki je najbližje  $P'$ .)
2. Zapiši sistem enačb  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(u)$  v primerni obliki za Newtonovo iteracijo in izrazi pripadajočo Jacobijevo matriko z odvodoma  $\dot{\mathbf{p}}$  ter  $\dot{\mathbf{q}}$ .
3. Napiši Octave/Matlab funkcijo, ki za dani krivulji  $K$  in  $L$  po zgornjem postopku poišče vsa presečišča krivulj  $K$  in  $L$ .
4. Izberi dve 'zanimivi' krivulji (ki imata vsaj 3 presečišča) in v poročilo vključi dve sliki: na prvi nariši lomljenki  $K'$  in  $L'$  in jasno označi njuna presečišča, na drugi pa isto ponovi za krivulji  $K$  in  $L$ .

## Podrobnejša navodila za Octave/Matlab funkcijo

Napiši Octave/Matlab funkcijo `intersectionOfCurves`, ki poišče presečišča  $P$  krivulj  $K$  in  $L$  z danima parametrizacijama. Klic funkcije naj bo oblike

```
[P, Q] = intersectionOfCurves(p, pdot, intp, q, qdot, intq, h),
```

pri čemer je:

- $p$  ( $q$ ) kazalec na funkcijo, ki opisuje prvo (drugo) ravninsko krivuljo,
- $pdot$  ( $qdot$ ) kazalec na funkcijo, ki opisuje odvod prve (druge) ravninske krivulje,
- $intp$  ( $intq$ ) interval, na katerem je parametrizirana prva (druga) ravninska krivulja,
- $h$  dolžina podintervalov, na katere sta razdeljena intervala  $intp$  in  $intq$  (zadnji podinterval je lahko krajši),
- $P$  seznam presečišč krivulj  $K$  in  $L$  ( $2 \times m$  matrika),
- $Q$  seznam presečišč lomljenk  $K'$  in  $L'$  ( $2 \times m$  matrika).

### Primer

Za krivulji  $K$  in  $L$ , dani s parametrizacijami

$$t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ \cos t \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad u \mapsto \begin{bmatrix} u \\ \sin u \end{bmatrix}$$

na intervalih  $[-2\pi, 2\pi]$  in korakom  $h = 0.1$ , bi uporabili

```
p = @(t) [t; cos(t)];
pdot = @(t) [1; -sin(t)];
intp = [-2*pi, 2*pi];
q = @(u) [u; sin(u)];
qdot = @(u) [1; cos(u)];
intq = [-2*pi, 2*pi];
h = 0.1
[P, Q] = intersectionOfCurves(p, pdot, intp, q, qdot, intq, h)
```

### Testi

Datoteki s funkcijo `intersectionOfCurves` dodaj vsaj en test za en par krivulj  $K$  in  $L$ , s katerimi se boš prepričal v pravilnost delovanja svojega programa.

## Oddaja naloge

Na spletno učilnico oddaj naslednje:

1. Datoteko **intersectionOfCurves.m**, ki naj vsebuje *komentarje* in *teste*,
2. Datoteko (poročilo) **solution.pdf**, ki vsebuje izpeljavo rešitev in sliko presekov dveh 'zanimivih' krivulj (ter pripadajočih lomljenk).

S kolegi se lahko posvetuješ in lahko tudi skupaj rešujete nalogo, vendar moraš program in poročilo izdelati sam. Uporabljaš lahko vse Octave/Matlab funkcije z vaj/predavanj.