VEKTORSKI PROSTORI

Linearna algebra
Polona Oblak, Fakulteta za računalništvo in informatiko, UL

1. Vektorski prostor in podprostor

Realni vektorski prostor V je množica *vektorjev* $v \in V$, za katere imamo definirani dve notranji operaciji

- seštevanje vektorjev ($u, v \in V \Longrightarrow u+v \in V$) in
- množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v = \alpha \cdot v \in V$),

z lastnostmi

(VP1) $u + v = v + u$ in $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(VP2) obstaja *ničelni vektor* $\mathbf{0}$ in velja $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$,
(VP3) za vsak $v \in V$ obstaja *nasprotni vektor* $-v$, za katerega velja $v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$,
(VP4) $1 \cdot v = v$ za vsak $v \in V$,
(VP5) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$,
(VP6) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,
(VP7) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

za poljubne $u, v, w \in V$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pri tem bomo, kot običajno v matematiki, simbol $\cdot$ pri produktu vektorja s številom večinoma izpuščali. Torej bomo občasno pisali kar $\alpha v = \alpha \cdot v$.

Trditev 1. *Naj bo V vektorski prostor. Potem velja*

(1) $0 \cdot v = \mathbf{0}$ za vsak $v \in V$,
(2) V vsebuje ničelni vektor $\mathbf{0}$,
(3) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

Za vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ in skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ imenujemo vektor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Denimo, ničelni vektor $\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$ je linearna kombinacija poljubnih vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Linearno kombinacijo z izključno ničelnimi koeficienti imenujemo *trivialna* linearna kombinacija.

Če je podmnožica U vektorskega prostora V
(VPP1) zaprta za seštevanje ($u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$) in
(VPP2) zaprta za množenje vektorjev z realnimi števili ($v \in U$, $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha v \in U$),
potem jo imenujemo *vektorski podprostor* prostora V.

Vsak vektorski podprostor po (VPP2) vsebuje tudi vektor $0 \cdot v = \mathbf{0}$. Zatorej podmnožica vektorskega prostora, ki ne vsebuje ničelnega vektorja, ne more biti vektorski podprostor.

Ker lastnosti (VP1)-(VP7) veljajo za poljubne elemente vektorskega prostora V, veljajo tudi za vse elemente vektorskega podprostora U v V. Poleg tega je vektorski podprostor po definiciji zaprt za seštevanje in množenje s števili. Zatorej je vsak vektorski podprostor hkrati tudi vektorski prostor.

Izrek 1. *Podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je poljubna linearna kombinacija $\alpha u + \beta v$ vektorjev $u, v \in U$ tudi vsebovana v U.*

Linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ker je linearna kombinacija linearnih kombinacij vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ zopet linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$, je po Izreku 1 linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearni podprostor v V. Pravimo, da vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *napenjajo* prostor $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ne le, da je linearna ogrinjača vektorski prostor. Velja celo več.

Izrek 2. *Linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorskega prostora V je najmanjši vektorski podprostor v V, ki vsebuje vektorje $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

2. Linearna odvisnost in neodvisnost

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so *linearno odvisni*, ko obstaja vektor v_k, ki je linearna kombinacija ostalih $v_1, v_2 \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$.
Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so *linearno neodvisni*, če niso linearno odvisni.

Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so torej linearno neodvisni, če je njihova trivialna linearna kombinacija edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka 0. Z drugimi besedami, če iz

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

sledi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Če množica vektorjev vsebuje ničelni vektor $\mathbf{0}$, potem lahko ničelni vektor izrazimo kot trivialno linearno kombinacijo ostalih vektorjev. Zato je vsaka množica, ki vsebuje ničelni vektor, linearno odvisna.

Izrek 3. *Naj bo A matrika reda $m \times n$ s stolpci $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(1) Vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n$ so linearno odvisni.
(2) Obstaja netrivialna rešitev homogenega sistema $Ax = 0$.
(3) Rang matrike A je strogo manjši od n.

Posledica 1. *V $\mathbb{R}^m$ ne obstaja množica z več (= strogo več) kot m linearno neodvisnimi vektorji.*

3. Baze vektorskih prostorov

Naj vektorji $u_1, u_2, \ldots, u_m$ napenjajo vektorski prostor $V = \mathcal{L}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Če so $u_1, u_2, \ldots, u_m$ linearno odvisni, potem obstaja podmnožica $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, ki prav tako napenja prostor V. Najmanjšo takšno podmnožico bomo imenovali *baza* vektorskega prostora. Dobimo jo tako, da iz množice $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ izberemo čim manj vektorjev (torej bodo linearno neodvisni), a bodo še vedno napenjali prostor V.

Množica vektorjev $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je *baza* vektorskega prostora V, če

(B1) so $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno neodvisni in
(B2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ napenjajo prostor V.

Izkaže pa se tudi sledeče.

Izrek 4. *Vsako linearno neodvisno množico vektorjev v vektorskem prostoru V je mogoče dopolniti do baze prostora V.*

Izrek 5. *Za vsako bazo vektorskega prostora V je zapis poljubnega vektorja $v \in V$ kot linearna kombinacija baznih vektorjev vedno enoličen.*

Izrek 6. *Vsak prostor ima nešteto baz. Vse baze vektorskega prostora imajo enako število vektorjev.*

Dimenzija prostora V je enaka moči (poljubne) baze prostora V.