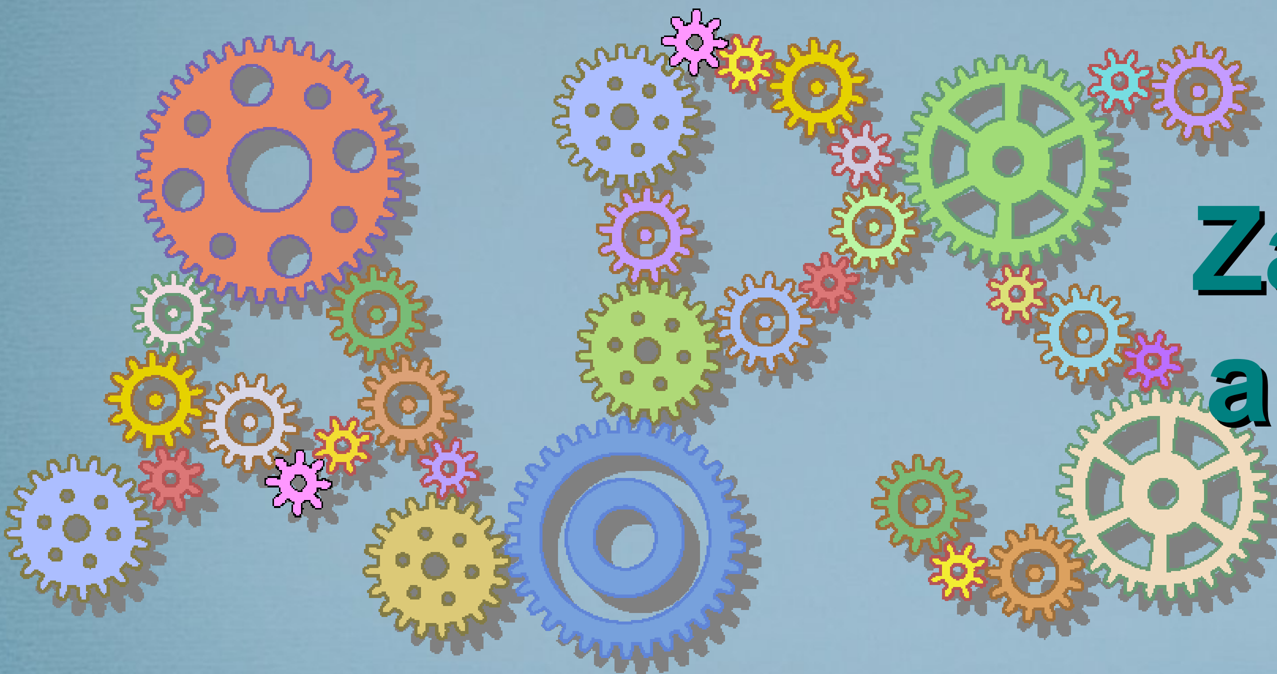
Algoritmi in podatkovne strukture



Zahtevnost algoritmov

Zahtevnost algoritmov

- Algoritem za svoje izvajanje potrebuje:
  - čas
    - realni čas, št. operacij, št. dostopov do pomnilnika
  - prostor
    - pomnilnik, disk

- Govorimo o:
  - časovni zahtevnosti algoritma; in
  - prostorski zahtevnosti algoritma.

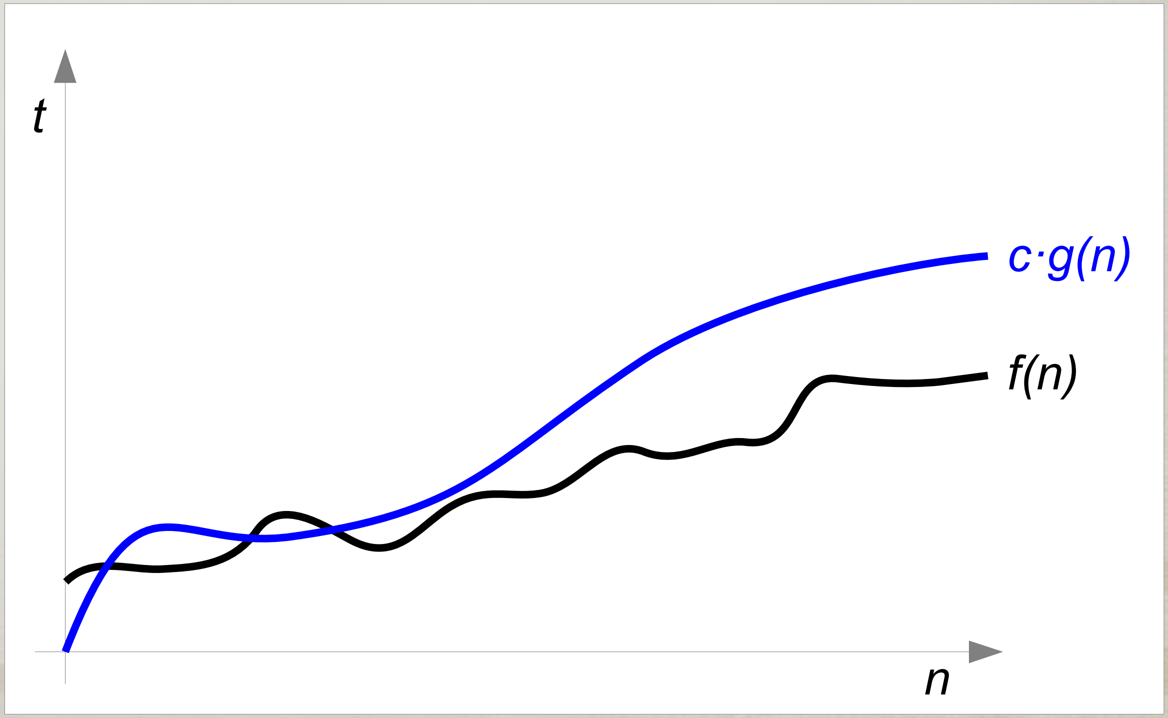
Zahtevnost algoritmov

- Zahtevnost je odvisna:
  - od samega algoritma; in
  - od naloge (vhoda algoritma).
    - Za reševani problem navadno obstaja ogromno različnih nalog.
- Zato govorimo o **asimpotski zahtevnosti**.
  - Kakšen je **red velikosti** zahtevnosti za dani algoritem pri **velikih** vhodnih podatkih?

Asimptotska notacija

- *O*-notacija.
  - *f* je kvečjemu reda *g*, *f* ne raste hitreje kot *g*, f je od zgoraj omejena z *g*.

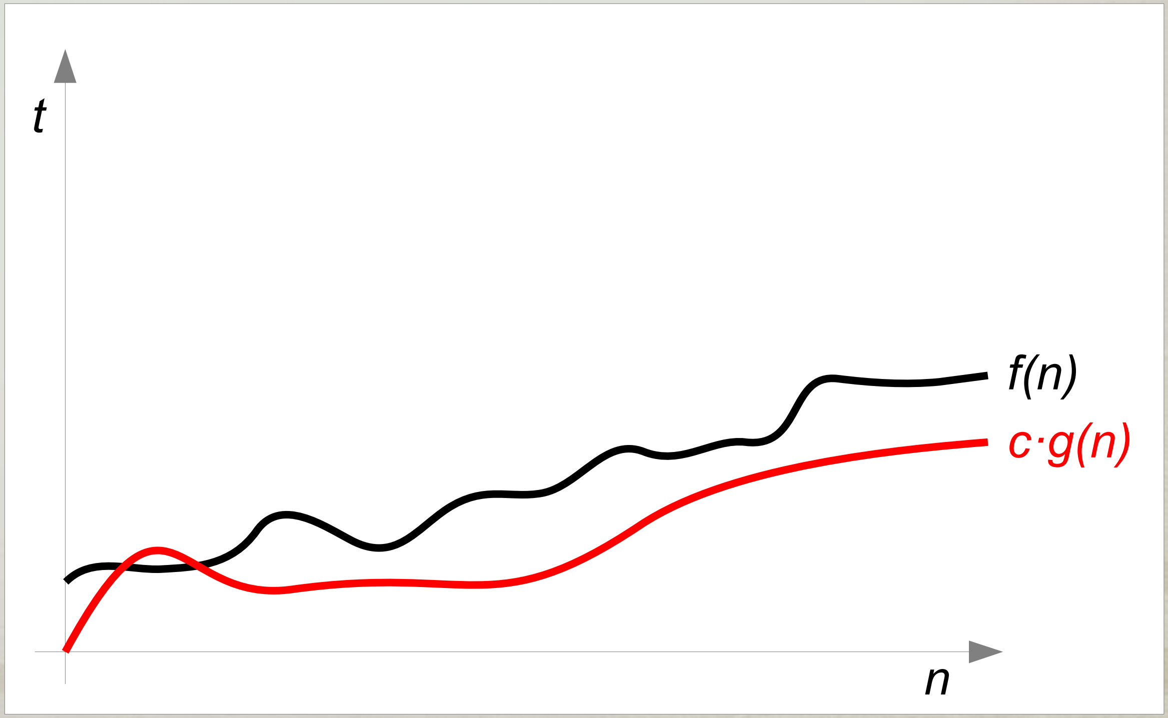
$$f(n) = O(g(n))$$



Asimptotska notacija

- Ω-notacija (omega-notacija).
  - *f* je vsaj reda *g, f ne raste počasneje kot g*, *f* je od spodaj omejena z *g*.

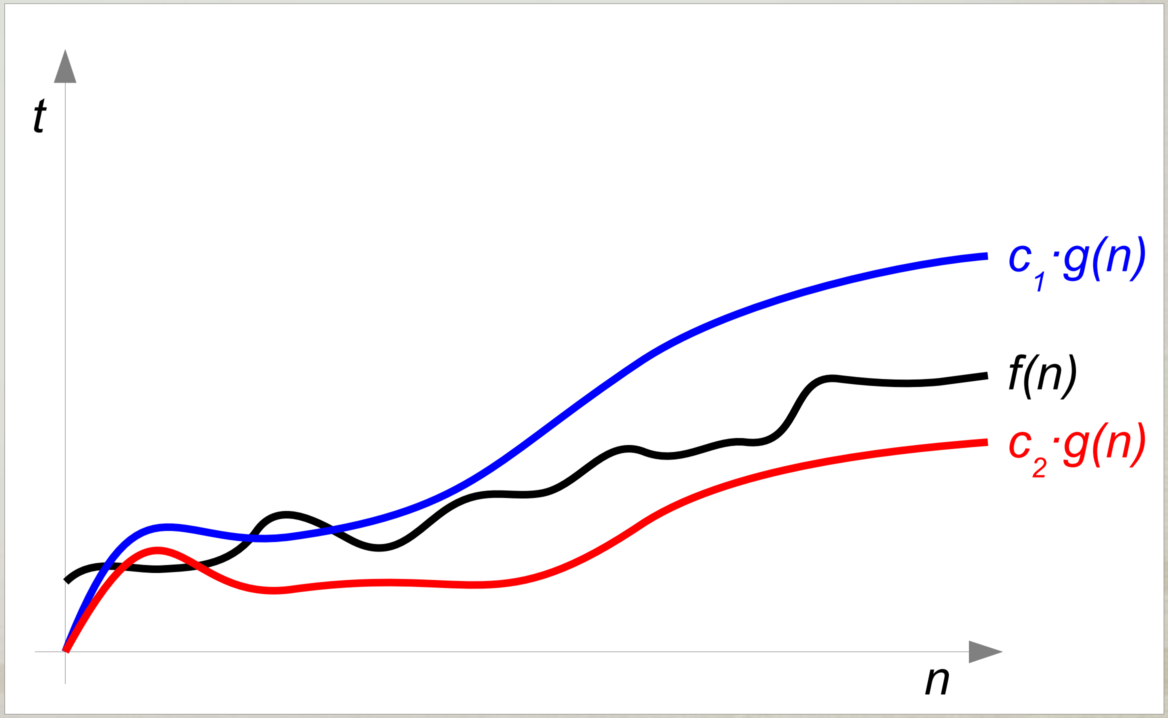
$f(n) = \Omega(g(n))$



Asimptotska notacija

- Θ-notacija (theta-notacija)
  - *f* je reda *g*, f je od zgoraj in od spodaj omejena z *g*.

$$f(n) = \theta(g(n))$$



Asimptotska notacija

Množice

Donald E. Knuth

- Formalne definicije

≤ $$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n) \}$$

= $$\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$$

≥ $$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c g(n) \leq f(n) \}$$

Opomba: vse funkcije so nenegativne.

Asimptotska notacija

- *Bonus: *o* in *ω* notacija

< $o(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall\, c>0\, \exists\, n_0\, \forall\, n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < cg(n) \}$

≤ $O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists\, c, n_0 > 0\, \forall\, n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n) \}$

= $\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists\, c_1, c_2, n_0 > 0\, \forall\, n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$

≥ $\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists\, c, n_0 > 0\, \forall\, n \geq n_0 : 0 \leq cg(n) \leq f(n) \}$

> $\omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall\, c>0\, \exists\, n_0\, \forall\, n \geq n_0 : 0 \leq cg(n) < f(n) \}$

Opomba: vse funkcije so nenegativne.

Asimptotska notacija

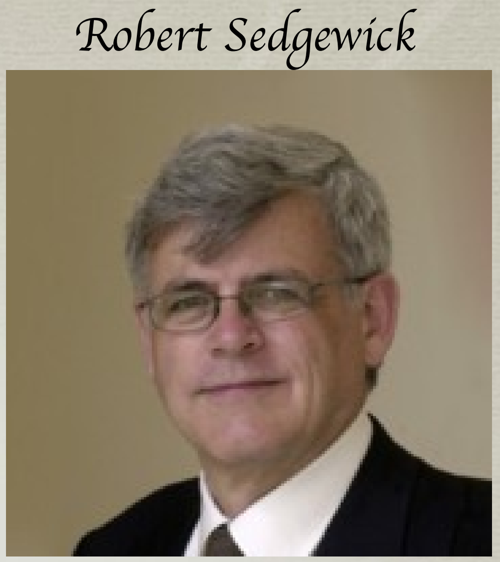
- Ustaljena (zlo-)raba
  - namesto ∈ uporabljamo =
    - za vse O, Ω in Θ

$$f(n) = O(g(n)) \equiv f(n) \in O(g(n))$$

  - Leva za vse / desna za enega

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

*Notacija s ~ (tildo)



- f(n) ~ g(n)

$$f(n) \sim g(n) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

- Intuitivno
  - ujemanje v redu velikosti
  - ujemanje v konstanti
  - kot Θ-notacija s konstanto
  - npr.: $5n^3 + 2n^2 + n + \lg n \sim 5n^3$

Asimptotska notacija

- Z limitami

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

Pri računanju limit pride prav l'Hopitalovo pravilo

namig	notacija	limita
$<$	o	$L = 0$
$\le$	O	$0 \le L < \infty$
$=$	Θ	$0 < L < \infty$
$\ge$	Ω	$0 < L \le \infty$
$>$	ω	$L = \infty$
$\sim$	$\sim$	$L = 1$

Razredi asimptotske zahtevnosti

Funkcija	Razred zahtevnosti
1	konstantna
$\lg n$	logaritemska
n	linearna
$n \lg n$	linearitmična, n-log-n
n^2	kvadratna
n^3	kubična
2^n	eksponentna
$n!$	faktoriela

Računanje z asimptotsko notacijo

- Refleksivnost:
  - *f(n) = O(f(n))*
- Eliminacija konstante:
  - če velja za Θ, potem velja tudi za O in Ω

$$c > 0 : c \cdot f(n) = \Theta(f(n))$$

Računanje z asimptotsko notacijo

- Izrek (simetrija):

$$f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=\Omega(g(n)) \wedge f(n)=O(g(n))$$

- Izrek (transponirana simetrija):

$$f(n)=O(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\Omega(f(n))$$

- Izrek (tranzitivnost):
  - Velja za vse O, Ω, Θ, o in ω

$$f(n)=O(g(n)) \wedge g(n)=O(h(n)) \Rightarrow f(n)=O(h(n))$$

Računanje z asimptotsko notacijo

- Produkt:

$$f(n) \cdot g(n) = \Theta(f(n) \cdot g(n))$$

- Vsota:

$$f(n) + g(n) = O(max(f(n), g(n)))$$

$$f(n) + g(n) = \Omega(min(f(n), g(n)))$$

- Prevladujoča funkcija:
  - če za vse $n > n_0$ velja $f(n) > g(n)$, potem

    $O(f(n) + g(n)) = O(f(n))$

Ugotavljanje zahtevnosti

- Časovna/prostorska zahtevnost:
  - v najboljšem primeru
  - v najslabšem primeru
  - v povprečju
  - v poljubnem primeru