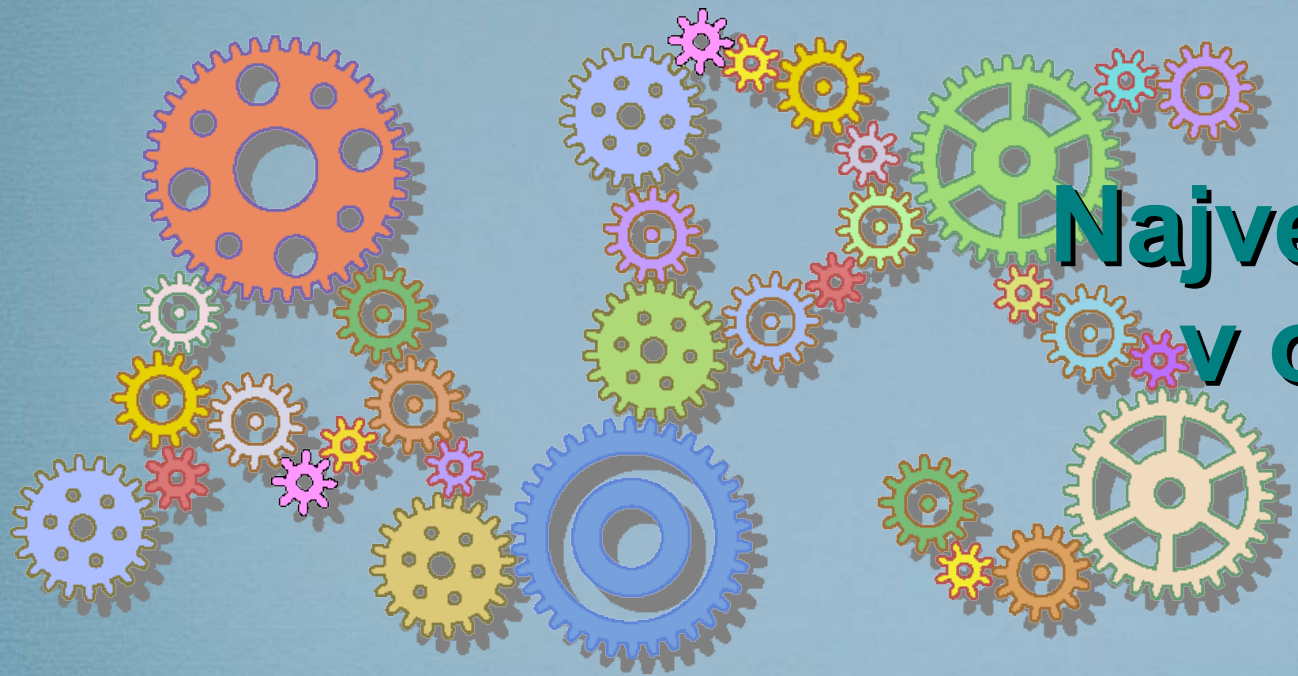
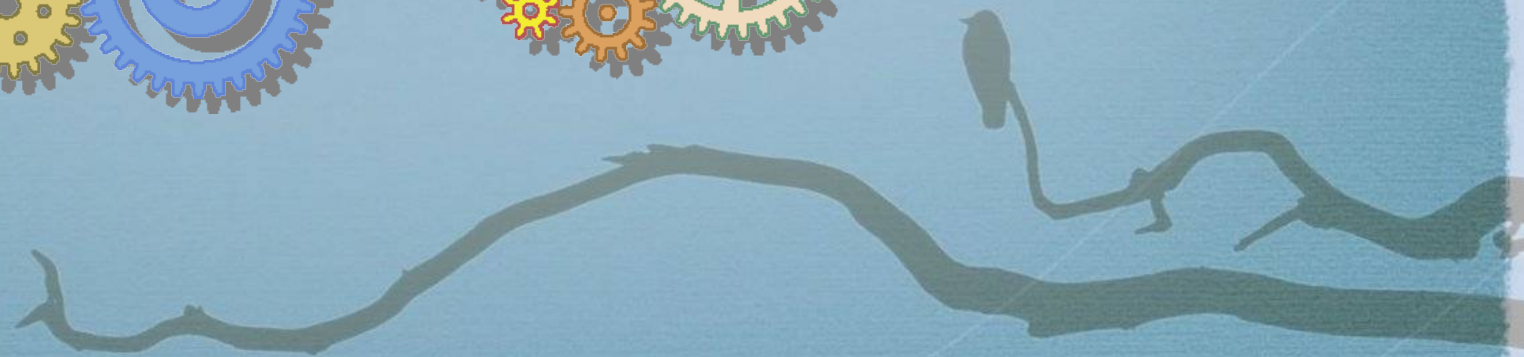


Algoritmi in podatkovne strukture



**Največji pretok
v omrežju**



Največji pretok

- Definicija problema:

Usmerjen graf - omrežje

$$G = (V, E)$$

0 – izvor, $n-1$ ponor

$$V = \{0, 1, \dots, n - 1\}$$

Množica povezav

$$E \subseteq V \times V$$

Kapaciteta povezav

$$\forall (i, j) \in E : c_{ij}$$



Dopustne rešitve

Vektor dopustnih rešitev (pretokov) je:

$$\vec{x} = (x_{ij}) \quad \forall (i, j) \in E$$

Pretok je nenegativen in omejen s kapaciteto:

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$$

Pritok je enak odtoku:

$$\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = \begin{cases} -v & i = 0 \\ v & i = n - 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Pretok

$$v(x) = \sum_j x_{0j} = \sum_j x_{j(n-1)}$$

Želimo maksimizirati to vrednost

Zasičene poti

- Naj bo P neusmerjena pot od izvora do ponora
- Povezava v P je
 - pozitivna (+), če je usmerjena v smeri poti
 - negativna (-), če je usmerjena v nasprotno smer
- Povezava (i,j) je zasičena:
 - (+): $x_{ij} = c_{ij}$
 - (-): $x_{ij} = 0$
- Pot P je zasičena, če je vsaj ena povezava na poti zasičena.

Izrek o optimalnem pretoku

- Pretok je največji, če je vsaka pot med izvorom in ponorom zasičena.

Ideja algoritma:

```
while (obstaja nezasičena pot P) {  
    zasiti povezave na P  
}
```

Iskanje nezasičenih poti

- Za iskanje bomo uporabili iskanje po grafu z označevanjem in obiskovanjem
- Vozlišča bomo označevali z oznakami

(j^+, δ_i)

(j^-, δ_i)

Do vozlišča i smo prišli po pozitivni povezavi, uspelo nam je pripeljati pretok δ_i

Do vozlišča i smo prišli po negativni povezavi, uspelo nam je pripeljati pretok δ_i

Iskanje nezasičene poti

```
Init:   izvor označimo z (-, inf)
while (obstaja neobiskano označeno vozlišče i) {
    obiščemo i;
    1. označimo vozlišča po + povezavah;
    2. označimo vozlišča po - povezavah;
    if (ponor označen) return;
}
```


Označevanje po poz. povezavah

i je trenutno vozlišče, gledamo povezavo (i,j)

- vozlišče j ni označeno
- $x_{ij} < c_{ij}$ (pretok manjši od kapacitete)

Vozlišče j označimo z:

$$(i^+, \delta_j)$$

$$\delta_j = \min(\delta_i, c_{ij} - x_{ij})$$

Označevanje po neg. povezavah

i je trenutno vozlišče, gledamo povezavo (j,i)

- vozlišče j ni označeno
- $x_{ji} > 0$ (pretok po tej povezavi ni 0)

Vozlišče j označimo z:

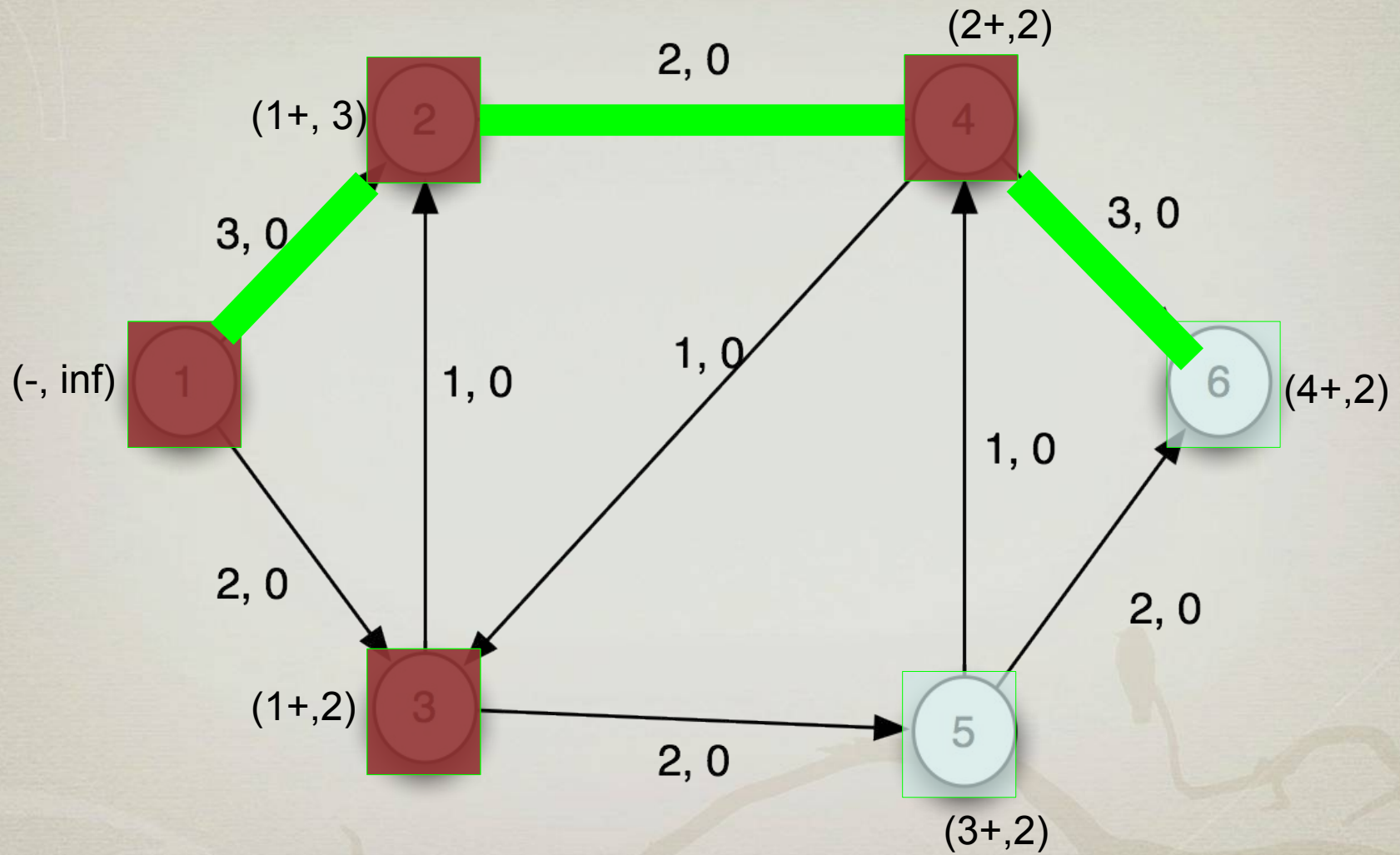
$$(i^-, \delta_j)$$

$$\delta_j = \min(\delta_i, x_{ij})$$

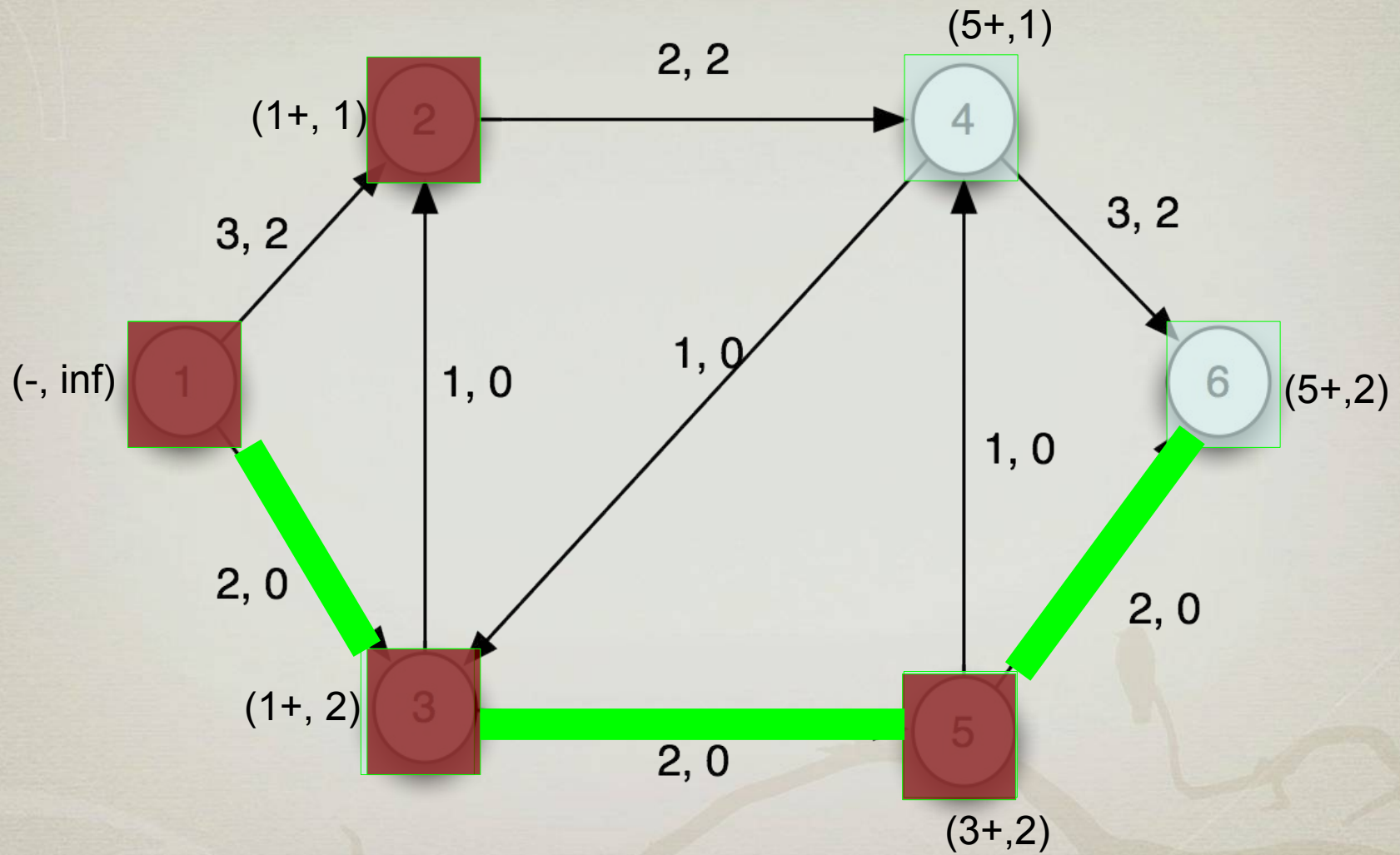
Zasičevanje poti

- Ko najdemo nezasičeno pot, imamo označen ponor in koliko pretoka (*delta*) nam je uspelo spraviti do njega.
- Označeno imamo iz katerega vozlišča nam je uspelo priti do njega.
- Od ponora do izvora vsem povezavam na dobljeni poti povečamo/zmanjšamo pretok za *delta*.

Primer



Primer



Primer

