

Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

11. december 2023

Kaj so permutacije

Naj bo A poljubna množica. *Permutacija* na A je vsaka bijektivna preslikava $f : A \rightarrow A$.

Permutacija reda n je permutacija v $\{1, 2, \dots, n\}$. Množico vseh permutacij reda n imenujemo *simetrična grupa reda n* in jo označimo z S_n .

Zgled:

- ▶ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ je permutacija reda 3.
- ▶ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ je permutacija reda 4.
- ▶ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ je permutacija reda 6.

Produkt permutacij

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi * \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\psi * \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Inverzna permutacija

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi * \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Zapis permutacije z disjunktними cikli

Permutacijo lahko zapišemo tudi z *disjunktными cikli* in ne v obliki *tabelice*.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ciklična struktura permutacije

Ciklična struktura permutacije je število posameznih dolžin ciklov v zapisu permutacije z disjunktными cikli.

Ciklična struktura permutacije π je
ciklična struktura permutacije ψ je

1-ciklu pravimo tudi *fiksna točka* permutacije,

2-ciklu pravimo *transpozicija*.

Potenciranje permutacij

Za potenciranje permutacij je ugodnejši zapis permutacije z *disjunktnimi cikli* kot pa zapis v obliki *tabelice*.

$$\pi =$$

Kako izračunati $\pi^2, \pi^3, \pi^4, \dots$?

$$\pi^2 =$$

$$\pi^3 =$$

⋮

Potenciranje permutacij

Trditev

Naj bo α permutacija, sestavljena iz samo enega cikla dolžine n . Permutacija α^k je sestavljena iz $\gcd(n, k)$ disjunktnih ciklov, ki so **vs**i iste dolžine $\frac{n}{\gcd(n, k)}$.

Posledica

Naj bo α permutacija, sestavljena iz samo enega cikla dolžine n . Potem je $\alpha^n = \text{id}$ in $\alpha^{-1} = \alpha^{n-1}$ in je n najmanjše naravno število (> 0) s to lastnostjo.

Potenciranje permutacij

Izrek

Naj bo

$$\pi = \alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_m,$$

kjer so α_i , $i = 1, \dots, m$, cikli v zapisu permutacije π z disjunktnimi cikli. Potem je

$$\pi^k = \alpha_1^k * \alpha_2^k * \dots * \alpha_m^k.$$

Red permutacije

Red permutacije π je najmanjše naravno število $k \geq 1$, za katerega je

$$\pi^k = \text{id}.$$

Če je α n -cikel, potem je α^k sestavljen iz $\text{gcd}(n, k)$ disjunktnih ciklov, ki so vsi iste dolžine $n/\text{gcd}(n, k)$.

Trditev

Red permutacije π je najmanjši skupni večkratnik dolžin ciklov v zapisu permutacije π z disjunktnimi cikli.

Zapis permutacije s transpozicijami

Trditev

Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt transpozicij.

Komentar: Ker že zapis cikla ni enoličen, tudi zapis kot produkt transpozicij ni enolično določen.

Parnost permutacij

Izrek (o parnosti permutacij)

Denimo, da lahko permutacijo π zapišemo kot produkt m transpozicij, pa tudi kot produkt (morda drugih) n transpozicij. Potem je

$$m \equiv n \pmod{2}.$$

Parnost permutacij

Permutacija je *soda*, če jo lahko zapišemo kot produkt sodo mnogo transpozicij, permutacija je *liha*, če jo lahko zapišemo kot produkt liho mnogo transpozicij.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Pravimo, da sta (v permutaciji π) števili 1 in 2 v *inverziji*, ker sta v spodnji vrstici tabele v *napačnem* vrstnem redu: 1 je manjše kot 2, toda 2 je zapisana pred 1.

Parnost permutacij, ponovimo

Izrek (o parnosti permutacij)

Denimo, da lahko permutacijo π zapišemo kot produkt m transpozicij, pa tudi kot produkt (morda drugih) n transpozicij. Potem je

$$m \equiv n \pmod{2}.$$

Permutacija je *soda*, če jo lahko zapišemo kot produkt sodo mnogo transpozicij, permutacija je *liha*, če jo lahko zapišemo kot produkt liho mnogo transpozicij.

Igra 15

Igra 15 igra se na kvadratni igralni površini, na kateri je 15 ploščic s številskimi oznakami in eno *prazno polje*.



Naš cilj je, da s premikanjem ploščic dosežemo *ciljno pozicijo*, v kateri so številke po poljih urejene po velikosti.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 1 & 2 & 11 & 5 & 4 & 3 & 12 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \text{id}$$

Zgled igre 15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	16	10	12
13	14	11	15

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 16 & 10 & 12 & 13 & 14 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & & 12 & 13 & 14 & & \end{pmatrix}$$

Potenčna enačba

Trditev

Naj bodo α, β, γ dane permutacije, π pa permutacija-neznanka.

Enačba

$$\alpha * \pi * \beta = \gamma$$

je enolično rešljiva.

Potenčna enačba

Naloga: Poišči rešitve enačb

$$\pi^{2015} = (12)(34)(56789)$$

$$\pi^{2020} = (12)(34)(56789)$$

$$\pi^{2021} = (12)(34)(56789)$$

$$\pi^{2022} = (12)(34)(56789)$$

$$\pi^{2023} = (12)(34)(56789)$$

Če je α n -cikel, potem je α^k sestavljen iz $\gcd(n, k)$ disjunktnih ciklov, ki so vsi iste dolžine $n/\gcd(n, k)$.

Potenčna enačba

Naloga: Poišči rešitve enačb

$$\pi^{2015} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)$$

$$\pi^{2020} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)$$

$$\pi^{2021} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)$$

$$\pi^{2022} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)$$

$$\pi^{2023} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)$$