Osnove matematične analize
Vaje, 10. teden

1. Natančno nariši graf spodnjih funkcij (določi definicijsko območje, ničle, simetrijo, limite na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje).

   (a) $*f(x) = \frac{-2x}{x^2+4}$ (b) $f(x) = x \log(x)$

   Rešitve:

   (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ničla pri $x = 0$, lokalni maksimum pri $x = -2$, $f(-2) = \frac{1}{2}$, lokalni minimum pri $x = 2$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, konveksna na $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$, konkavna na $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} = 0$, $f(\pm 2\sqrt{3}) = \mp\frac{\sqrt{3}}{4} \approx \mp 0.4$, $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.

   (b) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$, ničla pri $x = 1$, lokalni minimum pri $x = \frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \approx -0.37$, je konveksna, $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\searrow 0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$.

2. * Z uporabo linearne aproksimacije za funkcijo dveh spremenljivk približno izračunaj vrednost spodnjega izraza.

$$\sqrt{\sin(-0.05) + 0.95}$$

   Rešitev: Točen rezultat: $0.948694\ldots$

3. * S pomočjo Taylorjevih polinomov $T_1(x)$ in $T_2(x)$ približno izračunaj $e^{0.1}$ in oceni napaki $R_1(x)$ ter $R_2(x)$.

   Rešitev: $e^{0.1} = 1.1$ oz. $e^{0.1} = 1.105$. Točen rezultat: $e^{0.1} = 1.1051709\ldots$, $0.005 < R_1 < 0.006$ in $0.000167 < R_2 < 0.000185$.

4. Naj bo $f(x) = \cos(x)$. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj $\cos(0.1)$ na 5 decimalk natančno.

   Rešitev: $\cos(0.1) \approx 0.99500$. Točna vrednost: $\cos(0.1) = 0.995004165\ldots$

5. * Naj bo $f(x) = (x-1)\cos(x)$. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj $f^{(4)}(0)$ in $f^{(5)}(0)$. Rezultat preveri še z odvajanjem!

   Rešitev: $f^{(4)}(0) = -1$, $f^{(5)}(0) = 5$.

6. * Izračunaj gradienta naslednjih funkcij.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{2x^2+y^2}$,

   (b) $f(x,y) = (2x-y)e^{x+y}$.

   Rešitvi:

   (a) $\text{grad} f = \left(\frac{-4x}{(2x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(2x^2+y^2)^2}\right)$,

   (b) $\text{grad} f = \left(e^{x+y}(2+2x-y), e^{x+y}(-1+2x-y)\right)$.

7. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}.$$

   Skiciraj nivojnice.

   Rešitev: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, nivojnice so elipse s središčem v izhodišču in polosema $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$.

8. * Dana je funkcija dveh spremenljivk $f(x,y) = x^2 y$.

(a) Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ v točki $(1,1)$.

(b) Izračunaj smerni odvod funkcije f v poljubni smeri v točki $(1,1)$. V kateri smeri je največji?

(c) Skiciraj nivojsko krivuljo skozi točko $(1,1)$ in gradient v tej točki. V kakšni smeri kaže gradient glede na nivojsko krivuljo?

Rešitve:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$,

(b) $f_{(x,y)}(1,1) = \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, največji je v smeri $(x,y) = (2,1)$,

(b) $\mathrm{grad} f(1,1) = (2,1)$, nivojnica ima enačbo $y = \frac{1}{x^2}$. Smerni koeficient tangente na nivojnico je -2, torej je smerni vektor tangente $(1,-2)$. Ker je $(2,1)\cdot(1,-2) = 0$, je gradient pravokoten na nivojnico.

9. * Nariši nivojnice funkcije $f(x,y) = y(x^2-1)$ in nato še pot od točke $(-2,1,3)$ do točke $(2,-1,-3)$, ki se nikjer ne vzpenja.

Rešitev: Nivojnice so krivulje $y = \frac{a}{x^2-1}$ za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in pa premice $y=0$, $x=1$, $x=-1$ pri $a=0$.