Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

9. oktober 2023

Izjave

Izjava je stavek, ki je bodisi resničen bodisi neresničen.
Vsak stavek ni izjava:

- *Zapri vrata!*
- *Ta stavek ni resničen.*

Kaj pa:

- *Zunaj sveti Luna.*

Izjave

Izjave delimo po *vsebini* na

- *resnične* (imajo vrednost 1) in
- *neresnične* (imajo vrednost 0)

ter *obliki* na

- *osnovne* (tudi *enostavne*) in
- *sestavljene*.

Izjave

Zgleda osnovnih izjav:

- *Zunaj sije Sonce.*
- *Peter sedi na vrtu.*

Zgledi sestavljenih izjav:

- *Če zunaj sije Sonce, Peter sedi na vrtu.*
- *Peter sedi na vrtu in zunaj sije Sonce.*
- *Ni res, da zunaj sije Sonce.*

Izjavni vezniki

Izjave sestavljamo s pomočjo *izjavnih veznikov* (tudi *izjavnih povezav, logičnih veznikov*).
Izjavni vezniki so:

- *enomestni* (npr. *ne*)
- *dvomestni* (npr. *in, ali, če... potem..., niti... niti...*)
- *tromestni,...*

Izjavni vezniki

Resničnost sestavljene izjave je odvisna samo od resničnosti sestavnih delov. Zato izjavne veznike definiramo s pomočjo *resničnostnih tabel*.

- negacija $\neg$
- konjunkcija $\wedge$
- disjunkcija $\vee$
- implikacija $\Rightarrow$
- ekvivalenca $\Leftrightarrow$

Negacija

Negacija izjave A, $\neg A$, beremo "*Ne A*".

$\neg A$ je resnična natanko tedaj, ko je A neresnična.
Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Negacija je *enomestni* izjavni veznik.

Konjunkcija

Konjunkcija izjav A in B, označimo jo z $A \wedge B$, in beremo "*A in B*".

$A \wedge B$ je resnična n.t., ko sta obe izjavi A in B resnični.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunkcija

Disjunkcija izjav A in B, označimo jo z $A \vee B$, in beremo "*A ali B*".

$A \vee B$ je resnična n.t., ko je vsaj ena od izjav A ali B resnična.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikacija

Implikacija izjav A in B, označimo jo z $A \Rightarrow B$, in beremo
"*Iz A sledi B*" "*Če A potem B*" "*A implicira B*"

Izjavi A pravimo *antecedens* implikacije, izjavi B pa *konsekvens* implikacije $A \Rightarrow B$.
$A \Rightarrow B$ je neresnična samo v primeru, ko je izjava A resnična in izjava B neresnična.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ekvivalenca

Ekvivalenca izjav A in B, označimo jo z $A \Leftrightarrow B$, in beremo
"*A ekvivalentno B*"
"*A natanko tedaj, ko B*"
"*A , če in samo če B*".
$A \Leftrightarrow B$ je resnična n.t., ko imata obe izjavi A in B isto logično vrednost.
Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Dogovor o opuščanju oklepajev

Če ni z oklepaji drugače naznačeno, potem:

1. Negacija veže močneje kot konjunkcija,
   konjunkcija veže močneje kot disjunkcija,
   disjunkcija veže močneje kot implikacija in
   implikacija veže močneje kot ekvivalenca.
2. Istovrstni (dvomestni) vezniki vežejo od *leve proti desni*.

Izjavni izrazi

Osnovne izjave označujemo s črkami $p, q, r, \ldots$
Namesto o izjavah govorimo o *izjavnih izrazih*.

1. *Izjavni konstanti* 0 in 1, ki jima pravimo tudi *laž* in *resnica*, sta izjavna izraza.
2. *Izjavne spremenljivke* $p, q, r, \ldots$ so izjavni izrazi.
3. Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ izjavni izrazi in je F n-mestni izjavni veznik, potem je $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ izjavni izraz.

Konstrukcijsko drevo in resničnostna tabela

Konstrukcijsko drevo opiše, kako izjavni izraz zgradimo iz bolj enostavnih izjavnih izrazov.

Resničnostna tabela izjavnega izraza za vsak *nabor* logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk pove logično vrednost izjavnega izraza.

Tavtologija in protislovje

Izjavni izraz je *tavtologija*, če je resničen pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo.

Izjavni izraz je *protislovje*, če je neresničen pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo.

Izjavni izraz je *nevtralen*, če ni niti tavtologija niti protislovje.

Enakovredni izjavni izrazi

Izjavna izraza A in B sta *enakovredna*, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost.
V tem primeru pišemo $A \sim B$.

Enakovredni izjavni izrazi

Izrek
Izjavna izraza A in B sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $A \Leftrightarrow B$ tavtologija.

Naloga
Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Disjunktivna normalna oblika

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{DNO}$
- A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{DNO} *lahko* zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, pripravimo eno osnovno konjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru resnične spremenljivke in negacije v tem naboru lažnih spremenljivk.

Naloga, znova

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Konjunktivna normalna oblika

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{KNO}$
- A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{KNO} *lahko* zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A neresničen, pripravimo eno osnovno disjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru lažne spremenljivke in negacije v tem naboru resničnih spremenljivk.

Kdaj KNO in DNO

Trditev

Vsak izjavni izraz ima DNO in
Vsak izjavni izraz ima KNO.

Posledica

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je *poln nabor izjavnih veznikov*, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike iz $\mathcal{N}$.

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.

Polni nabori izjavnih veznikov

Nekaj drugih polnih naborov izjavnih veznikov:

$$\{\neg, \vee\}\ , \quad \{\neg, \wedge\}, \quad \{\neg, \Rightarrow\}\ , \quad \{0, \Rightarrow\}$$

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:
Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

Še trije izjavni vezniki

- ekskluzivna disjunkcija $\veebar$
- Shefferjev veznik $\uparrow$
- Pierce-Lukasiewiczev veznik $\downarrow$

Ekskluzivna disjunkcija

Ekskluzivna disjunkcija izjavnih izrazov A in B, označimo jo z $A \veebar B$, in beremo "*A ekskluzivni ali B*".

$A \veebar B$ je resnična n.t., ko je natanko eden od izjavnih izrazov A in B resničen.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Velja tudi $A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$

Shefferjev veznik

Shefferjev veznik povezuje dva izraza A in B, kar označimo z $A \uparrow B$. Shefferjevemu vezniku pravimo tudi veznik NAND.
$A \uparrow B$ je neresničen n.t., ko sta oba izjavna izraza A in B resnična.
Definiran je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \uparrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Velja tudi $A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$

Pierce-Lukasiewiczev veznik

Pierce-Lukasiewiczev veznik povezuje dva izraza A in B, kar označimo z $A \downarrow B$.
Pravimo mu tudi veznik NOR.
$A \downarrow B$ je resničen n.t., ko sta oba izjavna izraza A in B neresnična.
Definiran je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Velja tudi $A \downarrow B \ \sim \ \neg(A \vee B)$

Kam jih uvrstimo po prednosti

Ekskluzivna disjunkcija veže tako močno kot (navadna) disjunkcija.

$$A \vee B \veebar C \vee D$$

pomeni isto kot

$$((A \vee B) \veebar C) \vee D$$

Kam jih uvrstimo po prednosti

Shefferjev in Pierce-Lukasiewiczev veznik vežeta tako močno kot konjunkcija.

$$A \uparrow B \wedge C \downarrow D \uparrow E$$

pomeni isto kot

$$(((A \uparrow B) \wedge C) \downarrow D) \uparrow E$$

Zakoni z novimi vezniki

ekskluzivna disjunkcija	$A \veebar B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$ $A \veebar B \sim B \veebar A$ $(A \veebar B) \veebar C \sim A \veebar (B \veebar C)$
Shefferjev veznik	$A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$ $A \uparrow B \sim B \uparrow A$
Pierceov veznik	$A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$ $A \downarrow B \sim B \downarrow A$

Sklepanje v izjavnem računu

Predpostavke:	1.	*Ta žival ima krila ali pa ni ptič.*
	2.	*Če je ta žival ptič, potem leže jajca.*
	3.	*Ta žival nima kril.*
Zaključek:	4.	*Torej ta žival ne leže jajc.*

Ali je ta sklep pravilen?

Formalizacija

ta žival ima krila	...	k
ta žival je ptič	...	p
ta žival leže jajca	...	j

1.	$k \vee \neg p$
2.	$p \Rightarrow j$
3.	$\neg k$
4.	$\neg j$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je *pravilen sklep* s *predpostavkami* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in *zaključkom* B, če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Pišemo: $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$

in beremo:
Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B.

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo *protiprimer*, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Nepravilen sklep

Z izbiro nabora $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ pridelamo:

$$\begin{array}{rcl} k \vee \neg p & \sim & 1 \\ p \Rightarrow j & \sim & 1 \\ \neg k & \sim & 1 \quad \text{in} \\ \neg j & \sim & 0 \end{array}$$

Protiprimer je žival, ki

- nima kril,
- ni ptič in
- leže jajca.

Pravilen sklep

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ natanko tedaj, ko je izraz $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$ tavtologija.

Zgled 0

Predpostavki:	1.	*Če dežuje je oblačno.*
	2.	*Dežuje.*
Zaključek:	3.	*Oblačno je.*

dežuje	...	d
oblačno je	...	o

Pravila sklepanja

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

Pravilom sklepanja pravimo tudi *osnovni pravilni sklepi*.

Dokaz pravilnosti sklepa

Pravilnost sklepa $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov $C_1, C_2, \ldots, C_m$, kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, 2, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od predpostavk ali
(b) C_i je tavtologija ali
(c) C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali
(d) C_i logično sledi iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled pravilnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t?

1.	$p \Rightarrow q$	predpostavka
2.	$p \vee r$	predpostavka
3.	$q \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$p \Rightarrow s$	HS(1,3)
7.	$\neg p$	MT(5,6)
8.	r	DS(2,7)
9.	t	MP(4,8)

Zgled pravilnega sklepa, še en

Ali iz predpostavk $p \vee \neg q, \neg q \Rightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r$ sledi $p \wedge r$?

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \models A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev* (Po)
$A \models A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

Zgled 3

Predpostavke:	1.	*Šel bom v kino, zvečer pa bom naredil domačo nalogo.*
	2.	*Če grem na tekmo in nato še v kino, zvečer ne bom mogel narediti domače naloge.*
Zaključek:	3.	*Ne morem iti na tekmo.*

grem na tekmo	...	t
grem v kino	...	k
naredim domačo nalogo	...	d

Zgled 4

Ali iz predpostavk $p, \neg p$ sledi q?

Zgled 5

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

Pogojni sklep

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_k \models B \Rightarrow C$ *natanko tedaj, ko*
$A_1, A_2, \dots, A_k, B \models C$.

Zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	p	predpostavka PS
3.2.	$q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	q	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)

Napačen zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek q.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	p	predpostavka PS
3.2.	$q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	q	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)
4.	q	DS(2,3.2)

Sklep je napačen, saj je nabor vrednosti $p \sim q \sim r \sim 0$ protiprimer.

Po zaključku pogojnega sklepa ne smemo uporabljati zamaknjenih vrstic.

Sklep s protislovjem

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$ *natanko tedaj, ko*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B \models 0.$

Zgled

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

Analiza primerov

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$ *natanko tedaj, ko*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \models C$ *in*

$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_2 \models C$.