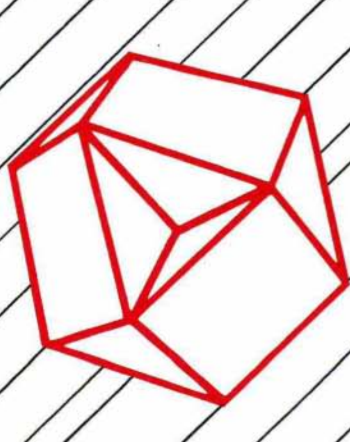
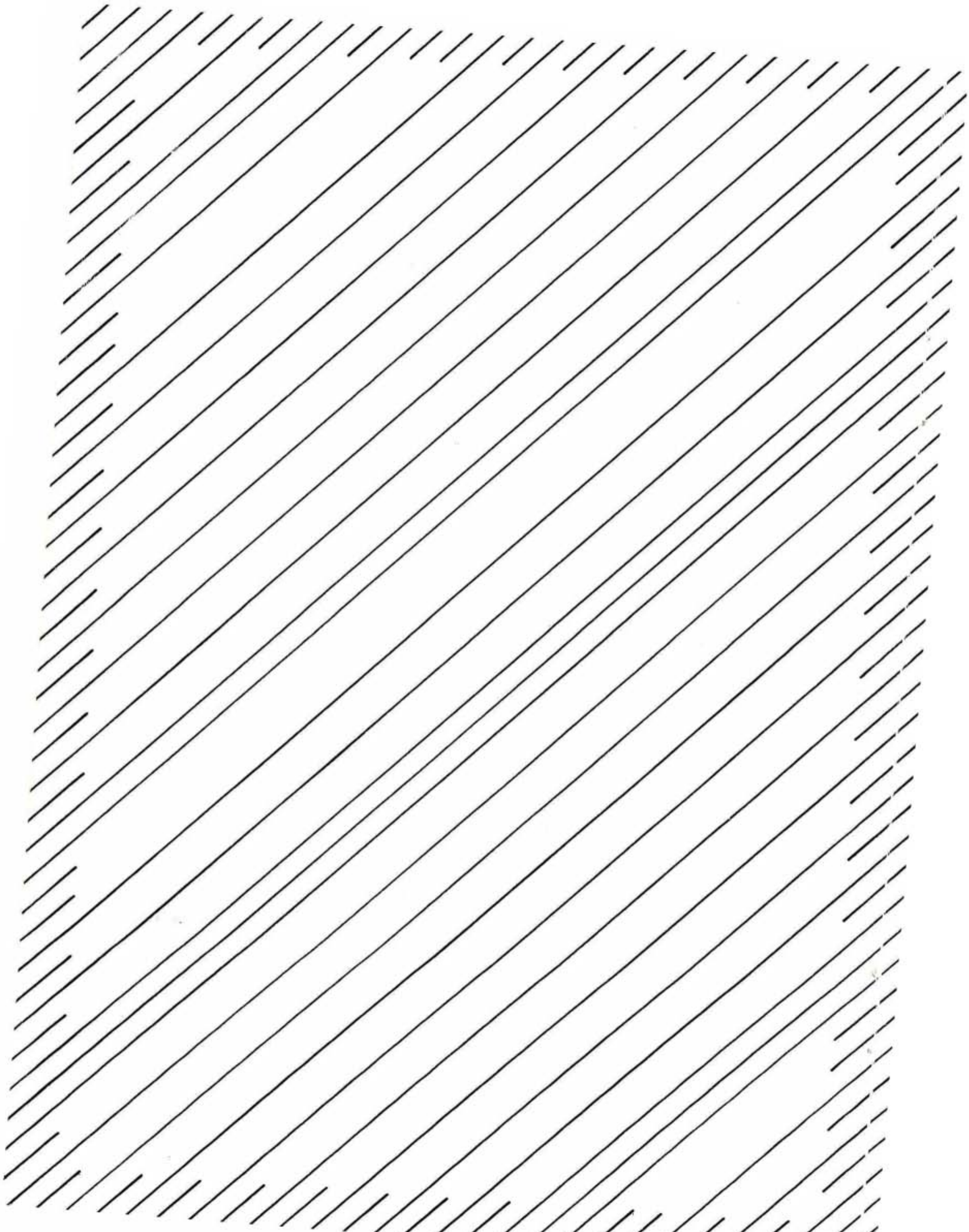
Drago Bajc

in Tomaž Pisanski

NAJNUJNEJŠE O GRAFIH





V zahvalo za
skrben pregled

Tom

V Ljubljani 4.6.1985

Drago Bajc

in Tomaž Pisanski

NAJNUJNEJŠE O GRAFIH

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS

Ljubljana 1985

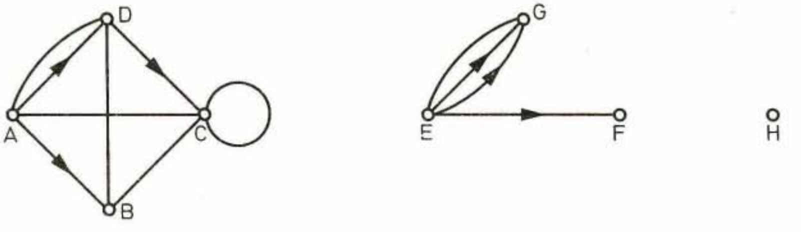
Math. Subj. Class. (1980)   50 - 01, 50C

VSEBINA

1. poglavje

UVOD

Oglejmo si sliko 1.1! Kar dovolj je zapletena! Na njej so označene **točke** A, B, C, D, E, F, G in H. Od teh osmih točk so nekatere med sabo povezane s črtami - daljicami ali loki. Za te zveznice bomo uporabljali izraz **povezave,** ker se nam zdi, da še najmanj zavaja našo predstavo. Takoj povejmo, da nas njihova podrobna oblika sploh ne bo zanimala. Za nas bo važno le to, ali sta dani točki povezani ali ne.



Slika 1.1

Poljubni točki nista nujno povezani. Lahko pa sta, in to tudi večkrat (govorimo o **večkratnih povezavah**). Med povezavami na sliki 1.1 so nekatere opremljene s puščico, rečemo jim **usmerjene povezave,** druge pa ne (**neusmerjene povezave**). Točka je lahko povezana sama s seboj z **zanko** (na primer točka C na sliki 1.1.).

Manjka samo še izraz za celotno sliko. Recimo ji **graf.** Posebej opozorimo na tole: na sliki 1.1 se povezavi AC in BD sekata. Presečišču pravimo **navidezna točka.** Navidezna točka ni točka grafa. Nastane le zaradi risanja grafa. Če bi povezavo BD narisali v obliki loka, bi se lahko navidezni točki izognili! Malo domišljije je treba, pa nam točke grafa lahko predstavljajo mesta, povezave pa cestne odseke, enosmerne in dvosmerne, ki povezujejo mesta v cestno mrežo. Kaj vse lahko z bežnim pogledom razberemo iz cestnega omrežja na sliki 1.1! Iz točke A lahko dopotujemo v točko D po dveh cestnih odsekih. Iz D lahko pridemo v A neposredno po dvosmernem cestnem odseku. Lahko pa gremo najprej po enosmerni ulici do C, potem pa po dvosmerni do A. Iz točke A v E sploh ne moremo priti (morda ležijo mesta E, F in G na otoku?). Zanka v C predstavlja morda sprehajališče, saj povezuje mesto C s samim seboj! Točka H je **izolirana (osamljena)**. Iz nje in vanjo ne vodi nobena povezava (H bi bil lahko čisto majhen otok brez cest!). Navidezne točke niso cestna križišča, ampak nadvozi (ali podvozi).

Cestno omrežje pa ni edina predstava, ki jo lahko damo našemu grafu. Takoj omenimo drugo (in bralcu toplo priporočamo, da si sam poišče še tretjo!). Vsaka točka naj pomeni nogometni klub. Povezava med danima točkama pomeni, da sta se ustrezni ekipi pomerili med seboj. Če se je to zgodilo večkrat, je v grafu med njima več povezav. Neusmerjena povezava naj pomeni neodločen izid, usmerjena pa zmago. Povezava, usmerjena npr. od A proti B, pomeni, da je ekipa A premagala ekipo B. V tej luči preberemo iz slike 1.1, da je moštvo D premagalo moštvo C, ekipi A in D sta se srečali dvakrat. Enkrat je zmagalo moštvo A, drugič pa je bil rezultat neodločen. Podobno sta se moštvi E in G srečali trikrat. Bralec pa naj premisli, katero moštvo je imelo v teh treh srečanjih več športne sreče! Malo težje je dati pomen zanki v točki C. Recimo, da to pomeni trening tekmo med moštvom in rezervnimi igralci!

Graf na sliki 1.1 je precej splošen. V njem nastopajo usmerjene in neusmerjene povezave, zanke, večkratne povezave. Če se hočemo poceni dokopati do nekaj osnovnih lastnosti grafov, bo zato priporočljivo, da pristanemo na kakšno omejitev. Najprej prepovemo vse usmerjene povezave. Dobljeni graf se imenuje **neusmerjeni graf**. Nato prepovemo vse zanke in večkratne povezave. Takemu grafu pravimo **enostavni neusmerjeni graf** (kratkosti na ljubo mu bomo rekli preprosto graf). V kasnejših poglavjih se bomo lotili spet drugega posebnega primera: grafa, katerega vse povezave so usmerjene. To bo **usmerjeni graf**.

Dogovorimo se še za nekaj oznak. Če je G (neusmerjeni) graf, bomo z V(G) označili množico njegovih točk, z E(G) pa množico njegovih povezav. Povedati moramo, da nekateri pravijo točkam **vozlišča**, povezavam pa **veje**. Točki A in B, ki ju veže kaka povezava e = AB = BA, sta **sosednji**. Rečemo, da sta A in B **krajišči** povezave e. Točke bomo označevali z velikimi črkami, izjemoma s številkami. Povezave bomo označevali z malimi črkami.

2. poglavje

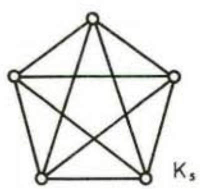
MED NIČELNIM IN POLNIM GRAFOM

Čeprav je enostavni neusmerjeni graf le poseben primer splošnega grafa, imamo še vedno opravka z bogatim gradivom, ki ga kaže sistematično obdelati. Zato bomo grafe, ki so tako ali drugače sorodni, obravnavali skupaj.

Naj bo n število točk grafa in m število njegovih povezav. Ti števili sta precej neodvisni. Hočemo reči: če poznamo n, s tem m še ni kaj prida določen, zanj ostane še vedno precej možnosti.

Kar sama od sebe se vsiljujeta dva skrajna primera. Prvega ponazarja slika 2.1 in ga ni težko opredeliti. To je graf brez povezav (m = 0). Pravimo mu **ničelni graf** N_n na n točkah. Indeks n pomeni število točk. Slika 2.1 prikazuje N_6 (n = 6, m = 0).

Slika 2.1



Slika 2.2

Drugi skrajni primer prikazuje slika 2.2. Tu je n = 5 in m = 10. Za ta graf je značilno, da je v njem vsaka točka povezana z vsako drugo. Takemu grafu pravimo **polni graf** K_n na n točkah. Na sliki 2.2 je prikazan K_5. Še enkrat poudarimo, da ima K_5 na sliki 2.2 le pet točk. Na sliki vidimo še pet **navideznih točk**, ki nastanejo pri sekanju povezav.

Če si grafe spet zamišljamo kot nogometna prvenstva, nam graf na sliki 2.2 pomeni 5 ekip ob koncu prvenstva, ko je vsako moštvo že igralo z vsakim drugim moštvom natanko enkrat (rezultati posameznih dvobojev pa nas ne zanimajo).

Koliko povezav premore K_n, polni graf na n točkah? Račun ni težak. Vsako od n točk lahko povežemo z vsemi drugimi (n - 1) točkami. Skupaj je torej n(n-1) povezav. Pri tem pa smo vsako povezavo šteli dvakrat, enkrat v eni smeri, drugič v drugi. Zato je treba to število razpoloviti:

(2.1) $$m = n(n - 1)/2$$

Če vstavimo v obrazec (2.1) n = 5, res dobimo $m = 5 \cdot 4/2 = 10$ povezav, kar smo videli že na sliki 2.2.

Če združimo oba skrajna primera, že lahko postavimo meji, med katerima se mora gibati število povezav m poljubnega (enostavnega) grafa G z n točkami:

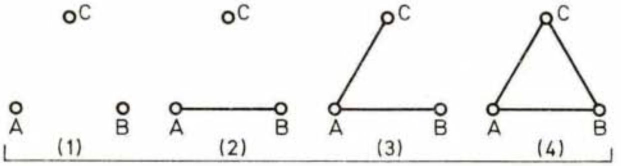
(2.2) $$0 \leq m \leq n(n - 1)/2$$

2.1. **Zgled:** Koliko je različnih grafov s tremi točkami?

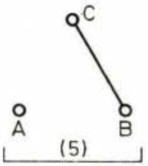
Če vstavimo v obrazec (2.2) n = 3, dobimo

(2.3) $$0 \leq m \leq 3$$

Graf na treh točkah ima lahko 0, 1, 2 ali 3 povezave. Slika 2.3 kaže vse različne grafe na treh točkah.



Slika 2.3

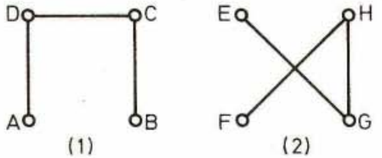


Slika 2.4

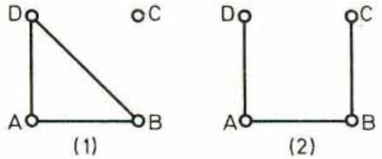
Mogoče se bo komu zdelo, da smo pozabili graf na sliki 2.4 in morda še katerega. To je odvisno od tega, kako gledamo na stvar. Pa se kar dogovorimo, da kasneje ne bo nesporazumov. Če bi ločili med točkami - npr. če bi bile A, B, C popolnoma določene osebe, povezave med njimi pa relacija 'poznati se', tedaj bi se graf (2) na sliki 2.3 in graf (5) na sliki 2.4 res razlikovala. Nikakor ni isto, če se poznata B in C ali pa če se poznata A in B. Če pa imamo vse točke za enakovredne (zamenljive), tako da jih lahko po volji preimenujemo, tedaj pa nas oznake ne zanimajo in priznati moramo, da gre npr. pri grafih (2) in (5) pravzaprav za en sam graf, le oznake so drugače razdeljene. Če na grafu (2) preimenujemo točko A v točko C, točko C pa v točko A, dobimo ravno graf (5). Preimenovanje: $A \to C$, $B \to B$, $C \to A$ nam iz grafa (2) da graf (5).

Učeno pravimo grafoma, ki ju lahko spreminjamo enega v drugega s preimenovanjem točk, **izomorfna grafa**. Izomorfizem je taka preslikava točk prvega grafa na točke drugega grafa (preimenovanje), ki ohranja sosednost: sosednji točki prvega grafa preslika v sosednji točki drugega in nesosednji točki prvega v nesosednji točki drugega.

Včasih je precej težko ugotoviti, ali sta dva grafa izomorfna ali ne. Izomorfna grafa imata vse 'bistvene' lastnosti enake. Imata isto število točk, isto število povezav itd.



Slika 2.5

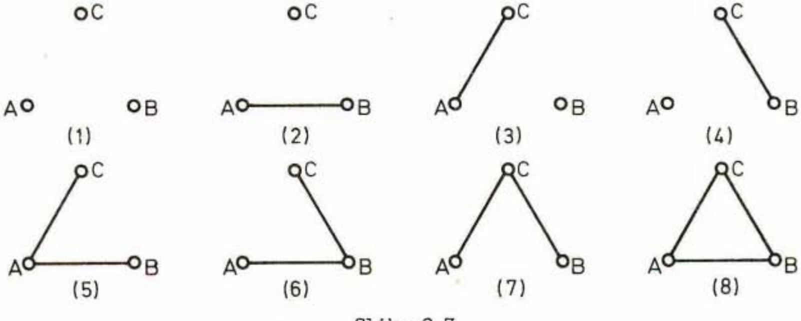


Slika 2.6

Grafa na sliki 2.5 sta izomorfna. Prvega preimenujemo v drugega takole: A → E, D → G, C → H, B → F. Grafa na sliki 2.6 pa nista izomorfna. V grafu (1) obstaja izolirana točka (to je točka C), ki nima nobenega soseda. V grafu (2) pa ni izolirane točke. Grafa torej nista izomorfna, čeprav se ujemata v številu točk in povezav.

Vrnimo se spet k zgledu 2.1. Vprašanje bi se moralo glasiti: **Koliko neizomorfnih grafov s tremi točkami obstaja?** Če pa bi želeli ločiti med grafoma (2) in (5), bi morali vprašati: **Koliko grafov na treh točkah obstaja?**

2.2. **Zgled:** Ada, Beti in Cilka so tri dekleta iz istega mesta. Graf (2) na



Slika 2.7

sliki 2.3 prikazuje položaj, ko se Ada in Beti poznata, Cilka pa ni njuna znanka. Graf (3) na sliki 2.3 prikazuje položaj, ko Ada pozna Beti in Cilko, Beti in Cilka pa se ne poznata. **Koliko je vseh možnosti**? Na sliki 2.7 je prikazanih vseh 8 možnosti. Na treh točkah obstaja 8 grafov.

2.3. **Zgled**: Koliko grafov je na petih točkah?

Najprej poglejmo, koliko je sploh možnih povezav med petimi točkami. To je ravno število povezav polnega grafa K_5. Iz obrazca (2.1) dobimo za $n = 5$: $m = 10$. Vsako povezavo lahko bodisi obdržimo, bodisi zbrišemo. Prva povezava daje 2 možnosti, druga ravno tako 2, in tako naprej do desete. Ker so izbire neodvisne med seboj, dobimo skupno število:

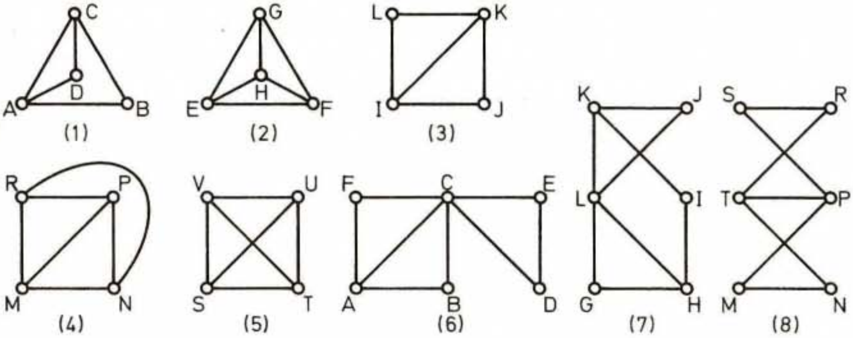
$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^{10} = 1024$$

možnosti.

2.4. **Vaja**: Koliko neizomorfnih grafov na štirih točkah obstaja?

2.5. **Vaja**: Koliko grafov na n točkah obstaja?

2.6. **Vaja**: Grafe na sliki 2.8 razdeli v skupine med seboj izomorfnih grafov. Če sta dva grafa izomorfna, poišči primerno preimenovanje, sicer pa poišči primerno lastnost, ki grafa razločuje!



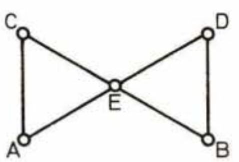
Slika 2.8

2.7. **Vaja**: Nariši polne grafe K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 in K_6.

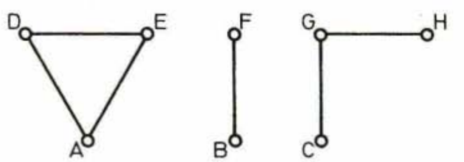
3. poglavje

POT, CIKEL IN ŠE KAJ

Vpeljimo nekaj novih pojmov. Število sosedov točke A v grafu imenujemo **stopnja** točke A in jo označimo z d(A). (Nekateri stopnjo imenujejo **valenca**, saj res spominja na valenco atoma v molekuli.)



Slika 3.1



Slika 3.2

3.1. **Zgled**: Kakšne so stopnje točk grafa na sliki 3.1?
Stopnje točk so: d(A) = d(B) = d(C) = d(D) = 2, d(E) = 4.

3.2. **Vaja**: Kakšne so stopnje točk grafa na sliki 3.2?
Za stopnje grafa velja naslednji pomemben izrek.

3.3. **Izrek**: Če ima graf G n točk in ima teh n točk stopnje d_1, d_2, ... , d_n, graf pa ima m povezav, velja enakost:

(3.1) $$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n = 2m$$

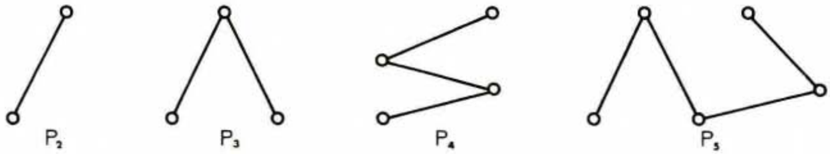
Dokaz: Vsaka povezava ima dva 'konca'. Če seštejemo vse stopnje točk, seštejemo ravno vse 'konce' povezav - dobimo natanko dvojno število povezav.

3.4. **Posledica**: (1) V poljubnem grafu je število vseh lihih točk (točk z liho stopnjo) sodo. (2) V poljubnem grafu veljata za najmanjšo stopnjo d_{min} in za največjo stopnjo d_{max} neenakosti $d_{min} \leq 2m/n$ in $d_{max} \geq 2m/n$.

Dokaz: (1) Če v enačbi (3.1) prenesemo vse sode člene z leve na desno, dobimo na desni še vedno sodo število. Na levi pa nam ostane vsota lihih števil (stopenj). Vsota lihih števil pa bo soda le, če je število členov sodo. V grafu mora biti torej število točk lihe stopnje sodo.

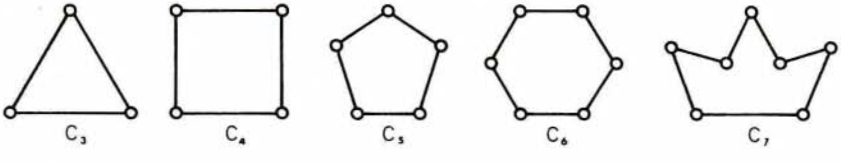
(2) Če v enačbi (3.1) nadomestimo vsako stopnjo d_i z najmanjšo stopnjo d_{min} dobimo neenakost $n \cdot d_{min} \leq 2m$. Podobno iz enačbe (3.1) dobimo neenakost $n \cdot d_{max} \geq 2m$. Ko delimo obe neenakosti z n, dobimo neenakosti, ki smo ju morali izpeljati.

Ena najpomembnejših družin grafov je družina poti. **Pot** P_n je graf na n točkah, ki je izomorfen grafu s točkami 1, 2, 3, ..., n, v katerem je točka 1 soseda točke 2, točka 2 soseda točke 3, ..., točka n - 1 pa soseda točke n. Točke 2, 3, ..., n - 1 imajo po dva soseda, točki 1 in n pa imata po enega soseda. Ti dve izjemni točki sta **krajišči poti.** Slika 3.3 prikazuje poti P_2, P_3, P_4 in P_5.



Slika 3.3

Poti so res preprosti grafi. Pot P_n ima n točk in n-1 povezav. Na poti P_n ima n - 2 točk stopnjo 2, dve točki - krajišči - pa imata stopnjo 1. Če bi sklenili krajišči poti, bi dobili graf, ki mu pravimo cikel. **Cikel** C_n dobimo, če vzamemo za točke oglišča n-kotnika, za povezave pa stranice n-kotnika. Cikel C_n ima n povezav. Ciklu C_3 pravimo pogosto kar **trikotnik.** Slika 3.4 prikazuje cikle C_3, C_4, C_5, C_6 in C_7.



Slika 3.4

Mnogokrat je pot ali cikel, ki ga obravnavamo, le del kakega večjega grafa. Pravimo, da je **podgraf** drugega grafa. Na splošno dobimo iz grafa G podgraf H tako, da odstranimo iz G nekaj povezav in točk. (Razume se, da z vsako točko zbrišemo tudi vse povezave, ki imajo to točko za krajišče.)

3.5. **Zgled**: Koliko podgrafov, enakih P_2, ima graf na sliki 3.1?

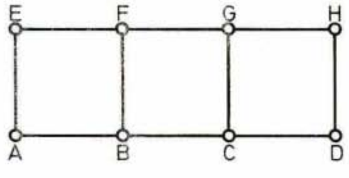
Ker je P_2 povezava, sprašuje naloga po številu povezav grafa. Teh pa je 6.

3.6. **Vaja**: Koliko podgrafov, enakih P_3, P_4 ali P_5, ima graf na sliki 3.1?

3.7. **Zgled**: Poišči vse cikle, ki so podgrafi grafa na sliki 3.1!

Cikla sta samo dva: ACEA in BDEB.

3.8. **Vaja**: Poišči vse cikle v grafu na sliki 3.5!



Slika 3.5

Sprehod v grafu je tako zaporedje točk T_1, T_2, T_3, ..., T_n, da je T_1 soseda T_2, T_2 soseda T_3, ..., T_{n-1} soseda T_n. T_1 je **začetek**, T_n pa **konec sprehoda**. Če je $T_n = T_1$, takemu sprehodu pravimo **obhod**. Če so v sprehodu same različne točke, nam sprehod določa podgraf, ki je pot. Podobno nam obhod s samimi različnimi točkami (z izjemo krajišč) določa cikel. Zato takim sprehodom pravimo kar pot, takim obhodom pa cikel. Sprehod, v katerem se točke sicer lahko ponavljajo, povezave pa ne, imenujemo **enostavni sprehod**. Podobno definiramo **enostavni obhod**.

V prejšnjem poglavju smo videli precej grafov. Nekateri med njimi so bili sestavljeni iz več 'kosov'. Med posameznimi kosi ni bilo povezav. Če je graf iz enega samega kosa, je **povezan**, sicer pa je **nepovezan**. Vsakemu kosu nepovezanega grafa pravimo učeno **povezana komponenta** grafa. Natančneje: graf je povezan, če za poljubni različni točki obstaja sprehod, ki ima ti točki za krajišči. Če za dve točki grafa tak sprehod ne obstaja, je graf nepovezan in točki pripadata različnima njegovima komponentama. Tako je na primer cikel C_n povezan graf na n točkah in vsaka njegova točka ima stopnjo 2. Velja tudi obratno: če ima povezani graf n točk in ima vsaka njegova točka stopnjo dva, tedaj je to cikel C_n.

3.9. **Zgled:** Graf na sliki 3.1 je povezan, graf na sliki 3.2 pa ne. Sestoji iz treh povezanih komponent.

3.10. **Vaja:** Določi komponente grafa na sliki 3.2.

Zanimivo je, da velja tale trditev.

3.11. **Trditev:** Če sta v grafu točki povezani s sprehodom, sta v njem povezani tudi s potjo.

Dokaz: Naj bosta A in B krajišči kakega sprehoda. Če so vse točke tega sprehoda različne, sprehod določa pot. Če pa se kaka točka, recimo C, na sprehodu ponovi, tedaj lahko sprehod razdelimo na tri dele. Sprehod od A do C, od C do C in od C do B. Srednji del lahko izpustimo in dobimo krajši sprehod od A do B. To lahko ponavljamo, dokler ne dobimo sprehoda s samimi različnimi točkami, kar smo že obravnavali na začetku dokaza.

Če je v grafu število povezav m dovolj majhno, graf ne bo povezan, pa če še tako gospodarno povezujemo točke. Seveda je zanimivo vprašanje, koliko najmanj mora biti povezav, da je graf lahko povezan. Na to vprašanje odgovarja naslednja trditev.

3.12. **Trditev:** Če ima graf G z n $(n > 1)$ točkami manj kot $n-1$ povezav, graf ni povezan.

Dokaz: Dokazujemo z matematično indukcijo. Za $n = 2$ je trditev očitna. Recimo, da velja trditev za $n = k$. Dokazali bomo, da velja tudi za $n = k + 1$. Vzemimo poljuben graf z $n = k + 1$ točkami in z $m < k$ povezavami. Po posledici 3.4(2) obstaja v grafu točka s stopnjo $d \leq 2m/n < 2k/(k+1) < 2$. Če je $d = 0$, obstaja v grafu osamljena točka in indukcijska hipoteza je dokazana brez uporabe indukcijske predpostavke. Če pa je $d = 1$, obstaja v grafu točka u stopnje 1 in ko jo iz grafa odstranimo, dobimo graf na k točkah z manj kot $k-1$ povezavami. Ta graf je po indukcijski hipotezi nepovezan, zato je tudi večji graf nepovezan (saj točka u ne more povezati več komponent).

Po trditvi 3.12 ima povezani graf na n točkah vsaj n-1 povezav. Ali bi se morda dalo dokazati, da mora povezani graf na n točkah imeti vsaj n povezav? Ne, saj je že pot P_n povezani graf na n točkah, ima pa samo n-1 povezav. Kot bomo videli, pa ni P_n edini graf s to lastnostjo.

3.13. **Vaja:** Nariši vse povezane grafe s petimi točkami in s štirimi povezavami! (Izomorfnih grafov ne loči!)

3.14. **Vaja:** Za n = 1, 2, 3 in 4 nariši vse neizomorfne grafe z n točkami in n-1 povezavami, ki so povezani. Kaj opaziš?

Vaji 3.13 in 3.14 govorita o posebni družini grafov, ki je tako pomembna, da zasluži posebno poglavje.

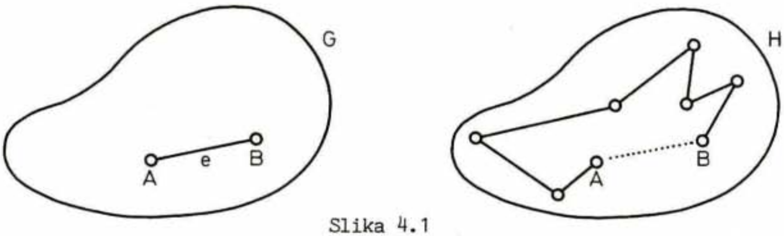
4. poglavje

DREVESA

V tem poglavju bomo spregovorili o drevesih. Za uvod začnimo z novima trditvama.

4.1. **Trditev:** Če v povezanem grafu G odstranimo povezavo e = AB in je dobljeni graf H povezan, tedaj v G obstaja cikel, ki vsebuje povezavo e.

Dokaz: Na sliki 4.1 si oglejmo grafa G in H. Če je H povezan, obstaja v H sprehod, ki veže A z B. Po trditvi 3.11 obstaja v grafu tudi pot, ki veže A z B. To pomeni, da dobimo iz te poti cikel, brž ko vrnemo odstranjeno povezavo e. Trditev je dokazana.



Slika 4.1

4.2. **Trditev:** Če v povezanem grafu G odstranimo povezavo e, ki leži na kakem ciklu, je dobljeni graf še vedno povezan.

Dokaz: Spet lahko uporabimo kar sliko 4.1. Ker e = AB leži na ciklu v G, obstaja v H pot od A do B. Vzemimo poljubni točki C in D grafa H. Vemo, da je mogoče po povezavah grafa G priti od C do D. To pa lahko storimo tudi na grafu H. Vsakič, ko bi v grafu G uporabili povezavo e, uporabimo namesto nje pot od A do B, ki poteka po grafu H in ki po trditvi 3.11 obstaja. Trditev smo dokazali.

Če združimo obe trditvi, pridemo do spoznanja. Vsak povezani graf ima tole lastnost: bodisi vsebuje cikel, bodisi mu ne moremo odstraniti nobene povezave, ne da bi pri tem dobili nepovezan graf.

In že je vse pripravljeno za novo poimenovanje. Povezani graf brez ciklov se imenuje **drevo.** Naslednja trditev po svoje karakterizira drevesa.

4.3. **Trditev:** Drevo je vsak povezani graf z lastnostjo, da izgubi povezanost, brž ko mu odstranimo katerokoli povezavo.

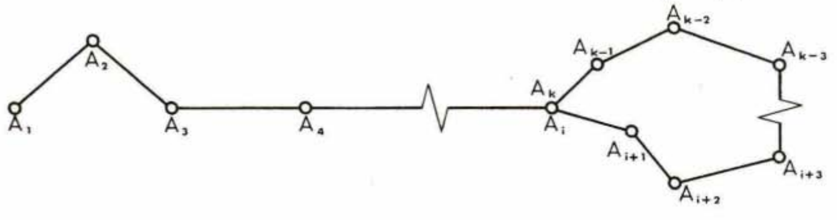
Dokaz: Če v drevesu odstranimo poljubno povezavo, zaradi trditve 4.1 izgubi povezanost. Po drugi strani pa v grafu, ki zgubi povezanost, brž ko mu odstranimo povezavo, po trditvi 4.2 ni ciklov.

4.4. **Trditev:** Povezani graf je drevo, če in samo če vodi od vsake točke do vsake druge ena in ena sama pot.

Dokaz: Če bi obstajali dve poti s skupnim začetkom in skupnim koncem, bi v grafu obstajal tudi cikel. Če namreč vzamemo prvo pot v eni smeri, drugo pa v nasprotni smeri, tedaj dobimo tak obhod, ki vsebuje cikel. Tudi to trditev bi morali dokazati. Graf bi ne bil drevo. V nasprotno smer je dokaz še lažji. Če povezani graf ni drevo, vsebuje cikel. Med poljubnima točkama na ciklu pa obstajata dve poti.

4.5. **Trditev:** V vsakem drevesu z vsaj dvema točkama obstaja točka stopnje 1.

Dokaz: Dokazujemo s protislovjem. Privzemimo, da trditev ne velja. Naj bo T drevo, ki nima točke stopnje 1. Ker je graf T povezan, nima osamljenih točk in je torej stopnja poljubne točke vsaj 2. Vzemimo poljubno točko A_1. Iz nje vodita vsaj dve povezavi. Izberimo poljubno povezavo $e_1 = A_1A_2$. Ker



Slika 4.2

je tudi drugo krajišče A_2 stopnje vsaj 2, obstaja povezava $e_2 \neq e_1$, tako da je $e_2 = A_2A_3$. Postopek ponovimo v točki A_3. Tako dobivamo točke A_1, A_2, ..., A_k. Ker ima T končno mnogo točk, se morajo v zaporedju ponavljati (če prej ne, pa najkasneje po k = n, kjer je n število vseh točk drevesa). Če se ustavimo pri ponovitvi kake točke v zaporedju, dobimo cikel, ki ga prikazuje slika 4.2. Tako smo dobili cikel v grafu T, ki pa je drevo, torej graf brez ciklov. Ker nas je zanikanje trditve privedlo do protislovja, moramo pač sprejeti trditev.

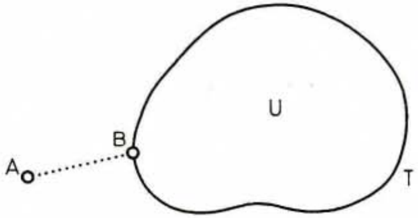
4.6. **Posledica:** Če imajo vse točke grafa G stopnjo vsaj 2, vsebuje G cikel.

Dokaz: Ker pogoji posledice veljajo za vsako komponento grafa, se lahko brez škode omejimo na primer, ko je graf G povezan. Po trditvi 4.5 povezani graf brez točk stopnje 1 ne more biti drevo. Povezani graf, ki ni drevo, pa vsebuje cikel.

4.7. **Trditev:** Vsak povezani graf z n točkami in n-1 povezavami je drevo. In obratno: vsako drevo z n točkami ima n-1 povezav.

Dokaz prvega dela: Če iz grafa G odstranimo poljubno povezavo, dobimo graf z n točkami in n-2 povezavami. Ta pa je po trditvi 3.12 zagotovo nepovezan. Od tod pa že lahko sklepamo, da je G drevo.

Dokaz drugega dela: Uporabili bomo metodo matematične indukcije. Indukcija bo po številu točk grafa. Za n = 1 trditev očitno velja. Osnova indukcije je tu. Dokazati moramo le še indukcijski korak. Denimo, da trditev velja za vsa drevesa z n = k točkami. Naj bo T drevo z n = k + 1 točkami. Po trditvi 4.5 v njem obstaja vsaj ena točka stopnje 1. Imenujmo to točko A. Z U označimo graf, ki ga dobimo iz T z odstranitvijo točke A. Glej sliko 4.3.



Slika 4.3

Očitno smo s tem izgubili ravno eno povezavo. (Na sliki 4.3 je to povezava e = AB.) Jasno je, da je U spet drevo. Ker ima U n točk, zanj hipoteza indukcije velja. U ima torej n - 1 povezav. Zato ima T eno več: skupaj n povezav. Tako je tudi indukcijski korak dokazan. Iz n sklepamo na n + 1. Ker je trditev veljavna za n = 1, velja tudi za vsak n.

To pomeni, da pri povezanih grafih lastnost 'biti brez ciklov' pomeni isto kot 'imeti za 1 manj povezav kot točk'. Spomnimo se, da ima pot P_n n točk in n - 1 povezav. Ker je P_n povezan graf, je torej le poseben primer drevesa.

Zdaj tudi razumemo, da sta vaji 3.13 in 3.14 spraševali po drevesih!

4.8. **Vaja**: Nariši najmanjših devet dreves, v katerih imajo točke lahko stopnjo samo 4 ali 1.

4.9. **Vaja**: Drevo ima samo točke stopnje 1 in 4. Znano je, da ima 10 točk stopnje 4. Koliko povezav ima?

Vaja 4.9. je kar težka, če se je lotimo nepripravljeni. Prav nobenih težav pa ne bo delala, če se spomnimo izreka 3.3.

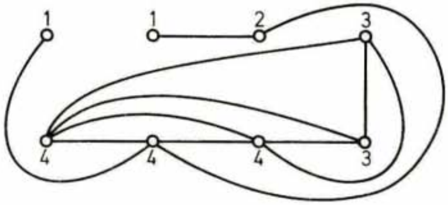
5. poglavje

NEKAJ OSNOVNIH LASTNOSTI GRAFOV

O stopnjah točk v grafu se da povedati mnogo zanimivih reči. Na primer tole:

5.1. **Zgled:** Izberimo si števila: $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 3$, $d_5 = 3$, $d_6 = 4$, $d_7 = 4$, $d_8 = 4$. Ali obstaja graf, ki ima osem točk in katerega stopnje so izbrana števila?

Tak graf obstaja. Eno od možnih rešitev prikazuje slika 5.1.



Slika 5.1

5.2. **Zgled:** Izberimo števila: $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 3$, $d_5 = 5$, $d_6 = 6$, $d_7 = 6$, $d_8 = 6$.

Tak graf ne obstaja. Tega ne bomo dokazovali. Bralca vabimo, da si sam izmisli še nekaj primerov in poskuša ugotoviti splošno pravilo, ki mu mora zadoščati zaporedje stopenj grafa. Opozarjamo, da je pravilo precej zapleteno in ga v tej knjižici ne bo našel.

5.3. **Trditev:** V poljubnem grafu z vsaj dvema točkama imata vsaj dve točki isto stopnjo.

Dokaz: Naj bo v grafu n točk. Najmanjša mogoča stopnja kake točke je 0 (če je točka osamljena), največja pa $n - 1$. Zdi se, da je možnosti dovolj: ravno n, toliko, kolikor je točk v grafu. Toda ne! Stopnji 0 in $n - 1$ se izključujeta! Če je namreč v grafu kaka točka osamljena, nobena druga točka ne more imeti stopnje $n - 1$. Če bi imela stopnjo $n - 1$, bi bila povezana z **vsemi** točkami grafa, torej tudi z osamljeno točko, to pa je seveda nemogoče. Zato je nujno, da imata vsaj dve točki grafa isto stopnjo!

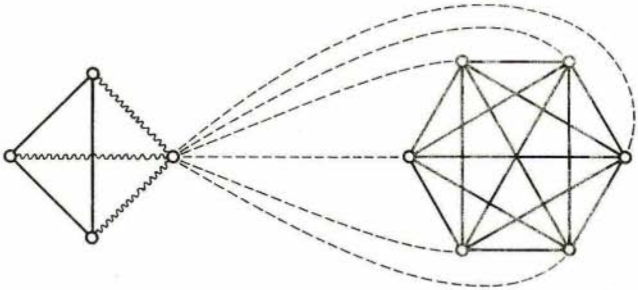
Zanimivo bi bilo raziskati grafe, ki 'skoraj' nasprotujejo trditvi 5.3. To bi bili grafi, v katerih imata le dve točki isto stopnjo.

5.4. **Vaja**: Ali obstajajo grafi, v katerih imata le dve točki isto stopnjo, ostale točke pa imajo same različne stopnje?

Za hip se spet povrnimo k povezanosti grafov. V drugem poglavju smo izpeljali neenakost (2.2): $0 \leq m \leq n(n - 1)/2$, ki omejuje število m povezav grafa na n točkah. Kasneje smo s trditvijo 3.12 dokazali, da je nepovezan vsak graf, ki ima $m \leq n - 2$ povezav. Zdaj pa si zastavimo nasprotno vprašanje. Če ima graf dovolj povezav, je zagotovo povezan. Vprašanje je: Koliko je 'dovolj'? Na to vprašanje odgovarja naslednja trditev.

5.5 **Trditev:** Vsak graf z n točkami in več kot $(n - 1)(n - 2)/2$ povezavami je povezan.

Dokaz: Vzemimo poljuben nepovezan graf na n točkah. Poskusimo mu povečati število povezav, le da pri tem ne sme postati povezan. Znotraj vsake povezane komponente lahko dodamo vse povezave. Prav tako lahko zvežemo dve



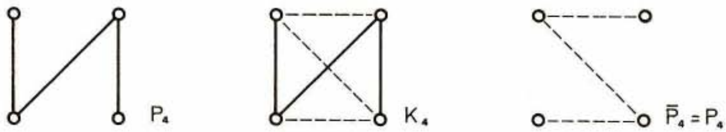
Slika 5.2

povezani komponenti, če ima graf več kot dve komponenti. Na koncu dobimo dve povezani komponenti, recimo prvo na n_1 točkah in drugo na n_2 točkah: $n_1 + n_2 = n$. Vsaka komponenta je poln graf (sicer bi povezave lahko še dodajali). Število povezav je $m = n_1(n_1-1)/2 + n_2(n_2-1)/2$. Kako moramo izbrati n_1 in n_2, da bomo dobili za m največjo vrednost? Naj bo recimo $n_1 \geq n_2$. Če povečamo n_1 za 1 in zmanjšamo n_2 za 1, se prvi sumand v vsoti poveča za n_1, drugi pa zmanjša za $n_2 - 1$. Vsota se poveča za $n_1 - n_2 + 1$.

Postopek se splača nadaljevati. Za m bomo torej dobili največjo vrednost tedaj, ko bo $n_1 = n - 1$ in $n_2 = 1$. To je nepovezan graf z n točkami in največjim številom povezav. Ima točno $(n-1)(n-2)/2$ povezav. Vsak graf z več kot toliko povezavami je nujno povezan. Trditev je dokazana.

Preden končamo, vpeljimo še en pomemben pojem: to je komplement grafa. Naj bo G poljuben graf. **Komplement** grafa G označimo z $\overline{G}$ in je določen takole. Ima iste točke kot G: $V(G)=V(\overline{G})$. V $\overline{G}$ sta dve točki sosednji, če in samo če **nista** sosednji v G. Takole si lahko predstavljamo: najprej narišemo graf G z modro barvo. Potem dopolnimo G do polnega grafa tako, da manjkajoče povezave potegnemo z rdečo barvo. Zbrišemo modre povezave in ostane komplement grafa G!

5.6. **Zgled:** Poišči komplement grafa P_4. Odgovor kaže slika 5.3.



Slika 5.3

5.7. **Vaja:** Nariši vse grafe na štirih točkah in poišči komplementarne pare.

5.8. **Vaja:** Kakšnemu pogoju mora zadoščati n, da bo kak graf na n točkah izomorfen svojemu komplementu?

5.9. **Vaja:** Poišči vse grafe, ki so izomorfni svojemu komplementu in nimajo več kot osem točk!

Za konec pa še tale presenetljivi izrek.

5.10. **Izrek**: Kakorkoli izberemo graf G, je vsaj eden od grafov G in $\overline{G}$ povezan.

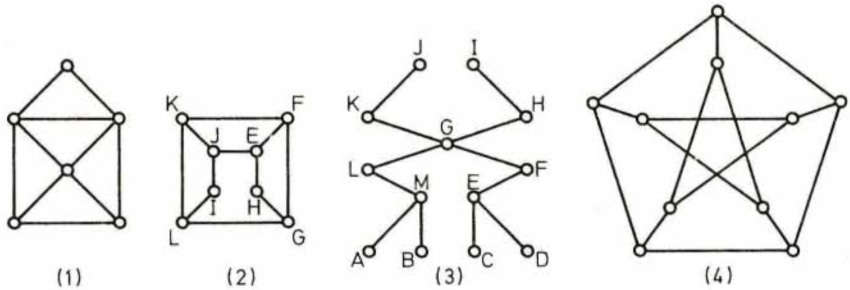
Dokaz: Spet si mislimo, da so povezave grafa G pobarvane modro, povezave njegovega komplementa pa rdeče. Skupaj sestavljata polni graf K_n. Če je rdeči graf povezan, izrek velja. Privzemimo, da rdeči graf ni povezan. Pokazali bomo, da je tedaj modri graf povezan. Spomnimo se, da sta točki v grafu sosednji, če je med njima povezava, in sta povezani, če obstaja v grafu pot, ki ju veže. Vzemimo poljubni dve točki A in B v rdečem grafu. Če v rdečem grafu nista povezani, je med njima neposredna modra povezava. Če pa A in B ležita v isti povezani komponenti rdečega grafa, obstaja taka točka C, ki leži v drugi povezani komponenti rdečega grafa. Povezavi AC in BC sta modri. A in B sta v tem primeru povezani v modrem grafu.

6. poglavje

DVODELNI GRAFI

V tem poglavju nas bodo zanimali **sodi** in **lihi** cikli. Cikel C_n je sod, če ima sodo mnogo točk (ali povezav), torej če je n sodo število. Lihi cikel pa ima liho mnogo točk. Sodi cikli so C_4, C_6, C_8, ... lihi pa C_3, C_5, C_7, ...

6.1. **Vaja:** Za vsak graf na sliki 6.1 določi vse različne dolžine ciklov, ki jih graf vsebuje.



Slika 6.1

6.2. **Vaja:** Za vsak graf na sliki 6.1 poišči najdaljšo pot, ki jo graf vsebuje. če graf vsebuje pot P_n, tedaj vsebuje tudi P_{n-1}, P_{n-2}, ... , P_2.

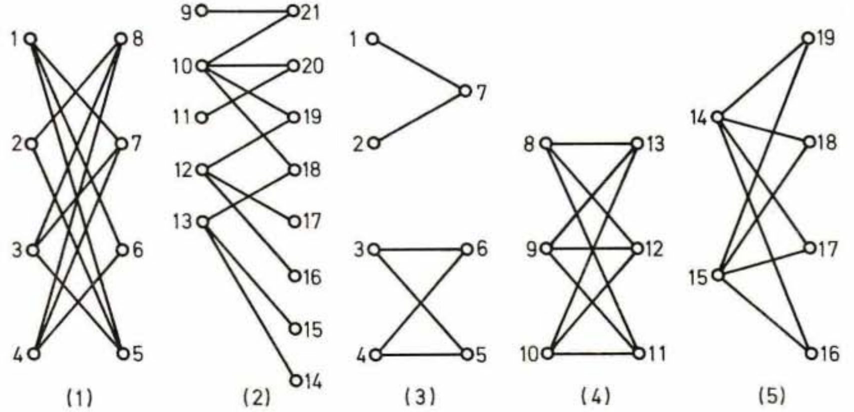
Ali velja za cikle podoben sklep?

Čas je, da definiramo dvodelne grafe. Graf G je **dvodelen**, če lahko množico njegovih točk V(G) razbijemo na dve podmnožici V_1 in V_2 tako, da nobeni točki iz iste podmnožice nista sosednji (med njima ni povezave!). Povezave (če jih je v grafu sploh kaj) tedaj vežejo le točke iz V_1 s točkami iz V_2. Vsak ničelni graf N_n je dvodelen, saj nima nobene povezave.

Paru V_1, V_2 pravimo **dvodelno razbitje** grafa G. Če točke iz V_1

pobarvamo z belo barvo, točke iz V_2 pa s črno barvo, nobena povezava ne veže dveh enako pobarvanih točk. Na kratko pravimo, da za dvodelne grafe obstaja belo-črno barvanje točk.

Dvodelne grafe rišemo navadno tako, da rišemo točke iz V_1 v eni vrsti, točke iz V_2 pa v drugi vrsti. Na sliki 6.2 so narisani nekateri dvodelni grafi.



Slika 6.2

6.3. **Vaja:** Dokaži, da sta grafa 6.1(2) in 6.2(1) izomorfna!

6.4. **Vaja:** Dokaži, da sta grafa 6.1(3) in 6.2(2) izomorfna!

Ti dve vaji nas prepričata, da sta grafa (2) in (3) iz slike 6.1 dvodelna. Seveda pa še ne vemo, ali sta grafa (1) in (4) iz slike 6.1 dvodelna. Če dvodelni graf 'lepo' narišemo, se znamo prepričati, da je resnično dvodelen. Ne poznamo pa še mehanizma, ki bi nas prepričal, da kakšen graf **ni** dvodelen.

6.5. **Vaja:** Dokaži, da trikotnik (graf C_3) ni dvodelen!

6.6. **Vaja:** Dokaži, da graf C_7 ni dvodelen!

Kdor je resnično poskusil rešiti vaji 6.5 in 6.6, je verjetno zaslutil, da noben lih cikel ni dvodelni graf. Najprej bomo dokazali nekaj preprostih trditev, ki jih bomo potrebovali pri dokazu izreka o karakterizaciji dvodelnih grafov.

6.7. **Trditev:** Vsak podgraf dvodelnega grafa je dvodelen. Z drugimi besedami: če graf G vsebuje kak podgraf, ki ni dvodelen, tedaj tudi G ni dvodelen.

Dokaz: Naj bo V_1, V_2 dvodelno razbitje grafa G in naj bo H podgraf v G. Množico V(H) razbijmo na podmnožici W_1, W_2 takole: W_1 naj sestoji iz tistih točk grafa H, ki so v V_1, W_2 pa iz tistih, ki so v V_2. Med dvema točkama iz W_1 ni povezave niti v G, kaj šele v H. Prav tako ni v H povezave med nobenima točkama iz W_2.

6.8. **Zgled:** Graf na sliki 3.5 je dvodelen. O tem nas prepriča dvodelno razbitje grafa. Množico V_1 sestavljajo točke A, C, F in H, množico V_2 pa B, D, E in G.

6.9. **Vaja:** Dokaži, da grafa (1) in (4) na sliki 6.1 nista dvodelna.

6.10. **Trditev:** Graf G, ki sestoji iz povezanih komponent G_1, G_2, ... G_k, je dvodelen, če in samo če je vsaka komponenta dvodelni graf.

Dokaz: Izraz 'če in samo če' zahteva, da dokažemo ekvivalenco trditev. To bomo dokazali tako, da bomo najprej dokazali trditev (implikacijo) v eni smeri, potem pa še v nasprotni smeri. Po trditvi 6.7 je vsak podgraf dvodelnega grafa dvodelen. Zato je tudi vsaka komponenta dvodelnega grafa dvodelna. V nasprotno smer pa dokaz ni nič težji. Če so vse komponente G_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) dvodelne, lahko najdemo za vsako od njih razbitje množice točk $V(G_i)$ na $V_1^{(i)}$ in $V_2^{(i)}$. Združimo $V_1^{(1)}$, $V_1^{(2)}$, ... , $V_1^{(k)}$ v V_1, preostale množice pa v V_2. Dobljeni množici V_1 in V_2 sta ravno iskano razbitje množice točk grafa G.

Že prej smo zaslutili, da nam lihi cikli nagajajo pri dvodelnosti. Naslednji izrek pa bo okarakteriziral dvodelne grafe ravno z lihimi cikli.

6.11. **Izrek:** Graf je dvodelen, če in samo če ne vsebuje lihih ciklov.

Dokaz: Najprej pokažimo, da lih cikel C_{2n+1} ni dvodelen. Točke na ciklu oštevilčimo vzdolž cikla: 1, 2, ... , 2n+1. Če bi bil cikel C_{2n+1} dvodelen, bi lahko množico točk razbili na dve podmnožici V_1 in V_2. Recimo, da točka 1 pripada množici V_1. Tedaj točka 2 pripada množici V_2, saj je točka 2 soseda točke 1. Podobno ugotovimo, da 3 pripada spet V_1 itd. Točke 1, 3, 5, ... pripadajo množici V_1, točke 2, 4, 6, ... pa množici V_2. Težava nastopi pri zadnji točki $2n+1$. Pripadati mora množici V_1. Pa smo v protislovju. Ker je 2n+1 soseda točke 1, mora ležati v drugi množici - to pa ni mogoče. Prvi del izreka je dokazan: če graf vsebuje lih cikel, po trditvi 6.7 ni dvodelen. Preostane še obrat: če graf ne vsebuje lihega cikla, je dvodelen.

Naj bo G povezan graf in A njegova točka. Naj bo $V_0 = \{A\}$ množica, ki vsebuje eno samo točko A. V_1 naj bo množica, ki vsebuje vse sosede točke A. V_2 naj vsebuje vse sosede točk iz V_1, ki jih ni v V_0 ali v V_1, tako gremo naprej: V_{k+1} vsebuje vse sosede točk iz V_k, ki jih ni v V_{k-1} ali v V_k.
Sestavimo:

$$U_1 = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \ldots$$
$$U_2 = V_0 \cup V_2 \cup V_4 \cup \ldots$$

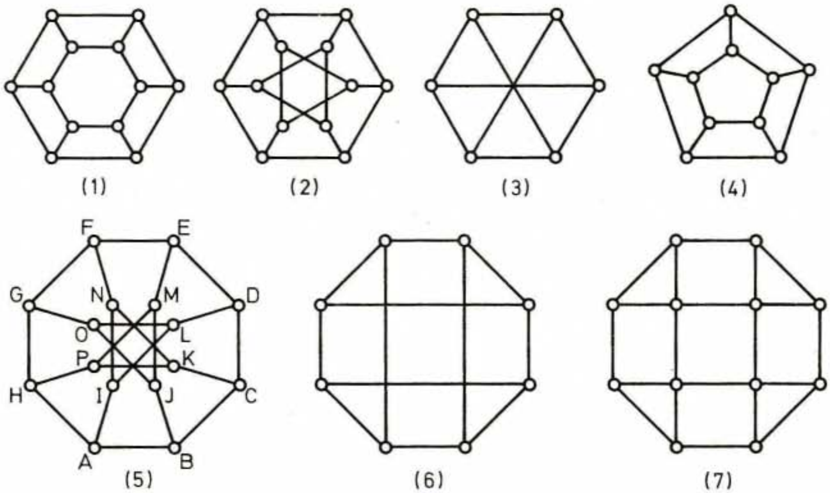
Naslednji razmislek pokaže, da nobeni dve točki znotraj U_1 (ali U_2) ne moreta biti povezani s povezavo, če v grafu ni lihega cikla. Recimo, da bi taki točki X in Y obstajali. Denimo, da X pripada množici V_m. Ker so sosede točke X nujno v eni od množic V_{m-1}, V_m ali V_{m+1}, lahko sklepamo, da Y pripada isti množici V_m. Če je m oblike 2j+1, pripadata X in Y množici U_1, sicer pripadata množici U_2. Lahko bi se prepričali, da za vsako točko S iz V_k obstaja pot $A = S_0$, S_1, ..., $S_k = S$, tako da vsaka točka S_m pripada množici V_m. Zato obstajata tudi poti $A = X_0$, X_1, ..., $X_m = X$ in $A = Y_0$, Y_1, ..., $Y_m = Y$. Poti imata skupen začetek in različna konca. Zato obstaja na njiju zadnja skupna točka, recimo $Z = X_i = Y_i$, tako da točke $X_i = Y_i$, Y_{i+1}, ... Y_m, X_m, X_{m-1}, ..., X_i oblikujejo cikel lihe dolžine. To je nemogoče, zato takih točk X in Y v grafu ni. To pa dokazuje, da je graf brez lihih ciklov res dvodelen. Iz dokaza razberemo, da je graf dvodelen, če in samo če obstaja zanj belo-črno barvanje točk.

Ta izrek je ugoden za ugotavljanje, ali je izbrani graf dvodelen. Če za graf G najdemo dvodelno razbitje množice točk, ugotovimo, da je dvodelen, če pa v njem poiščemo lih cikel, vemo, da ni dvodelen.

6.12. **Posledica:** Vsako drevo je dvodelni graf.

Dokaz: Ker drevo nima ciklov, nima lihih ciklov in je po izreku 6.11 dvodelni graf.

6.13. **Vaja:** Kateri med grafi na sliki 6.3 so dvodelni in kateri niso?



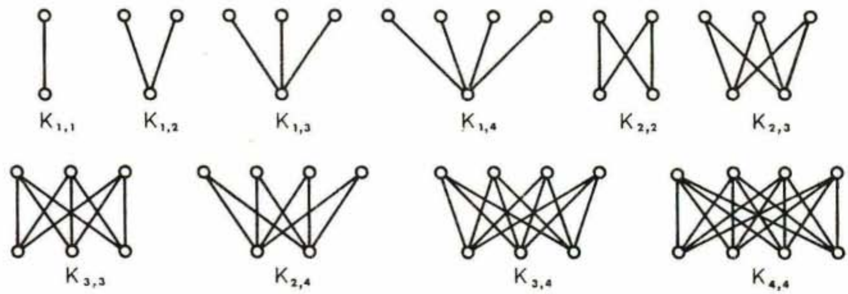
Slika 6.3

6.14. **Vaja:** Poišči vse P_n, C_n in K_n, ki so dvodelni!

Če dvodelnemu grafu dodamo povezavo, se kaj rado zgodi, da zgubi lastnost dvodelnosti. Zanimajo nas grafi, ki so dvodelni, izgubijo pa to lastnost, če jim dodamo **katerokoli** povezavo. Očitno mora biti vsaka točka iz V_1 soseda vsake točke iz V_2. Če ima V_1 m točk, V_2 pa n točk, dobimo na ta način $K_{m,n}$, **polni dvodelni graf.**

6.15. **Zgled:** Nariši grafe $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{1,4}$, $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$, $K_{4,4}$!

Rešitev je na sliki 6.4. Seveda je $K_{m,n}$ enak grafu $K_{n,m}$.



Slika 6.4

6.16. **Zgled:** Koliko točk ima graf $K_{m,n}$?

Polni dvodelni graf $K_{m,n}$ ima na enem bregu m točk, na drugem pa n točk. Skupaj ima $m + n$ točk.

6.17. **Zgled:** Koliko povezav ima polni dvodelni graf $K_{m,n}$?

Polni dvodelni graf $K_{m,n}$ ima mn povezav: vsaka od n točk prvega brega je povezana z vsako od m točk drugega brega.

6.18. **Vaja:** Koliko največ povezav ima lahko dvodelni graf na n točkah?

7. poglavje

REGULARNI GRAFI

V tem poglavju pa si bomo pobliže ogledali zanimivo družino grafov. Grafi v njej se odlikujejo po svoji pravilnosti. Spomnimo se, da je **stopnja** točke število njenih sosedov.

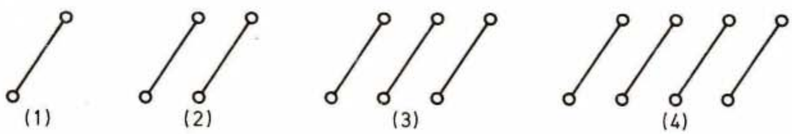
7.1. **Zgled:** Določi stopnje točk grafov na sliki 7.1!

Slika 7.1

Točke imajo naslednje stopnje: $d(A) = 1$, $d(B) = 2$, $d(C) = 2$, $d(D) = 3$, $d(M) = 3$, $d(N) = 3$, $d(P) = 3$, $d(R) = 3$, $d(S) = 3$, $d(T) = 3$.

Na sliki 7.1 ima graf (2) lastnost, da imajo vse njegove točke **isto** stopnjo. Grafu s to lastnostjo rečemo **regularni graf**. Graf G je regularen stopnje d ali d-valenten, če imajo vse njegove točke stopnjo d.

7.2. **Zgled:** Določi vse regularne grafe stopnje 1 in 2!



Slika 7.2

Edini povezani regularni graf stopnje 1 je K_2. Vsi drugi regularni grafi stopnje 1 sestojijo iz komponent, ki so vse enake K_2. Slika 7.2 prikazuje štiri regularne grafe stopnje 1.

Edini povezani regularni grafi stopnje 2 so cikli C_n. Vsak regularni graf stopnje 2 sestoji torej iz komponent, ki so cikli - v splošnem različnih dolžin.

7.3. **Vaja:** Določi vse regularne grafe stopnje 2 na 12 točkah. Koliko je regularnih grafov stopnje 2 na 20 točkah?

Situacija postane precej bolj zapletena pri regularnih grafih višjih stopenj. Že pri stopnji 3 ni več preprosto popisati vseh povezanih regularnih grafov. Mimogrede, regularnim grafom stopnje 3 pravimo tudi **kubični grafi**, saj spominjajo na mrežo kocke.

7.4. **Vaja:** Poišči vsaj dva neizomorfna povezana kubična grafa z istim številom točk.

7.5. **Vaja:** Pokaži, da ne obstaja kubični graf, ki bi imel 11 točk.

Kdor ni znal rešiti te vaje, naj si ogleda trditev 7.6 in posledico 7.7.

7.6. **Trditev:** Za regularni graf G stopnje d z n točkami in m povezavami velja zveza

(7.1) $$nd = 2m$$

Dokaz: V obrazec (3.1) vstavimo za vse stopnje isto vrednost d, pa dobimo zvezo (7.1).

Iz te trditve izhaja, da je $n = 2m/d$. Če je d liho število je n nujno sodo število. To pa lahko povemo tudi drugače.

7.7. **Posledica:** Vsak regularni graf lihe stopnje ima sodo mnogo točk.

7.8. **Vaja:** Poišči vse polne dvodelne grafe $K_{m,n}$, ki so regularni.

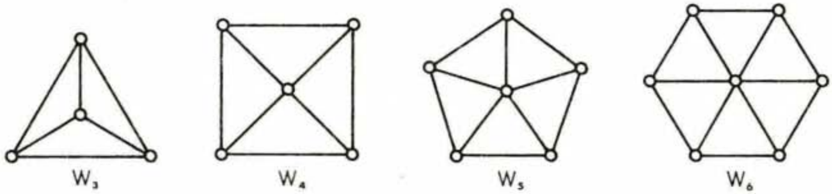
7.9. **Vaja:** Ali obstaja kak regularni dvodelni graf z liho mnogo točkami?

7.10. **Vaja:** Poišči vsa drevesa, ki so regularni grafi!

7.11. **Vaja:** Ali je polni graf K_n regularen?

Oglejmo si še nekaj posebnih družin grafov, ki jih matematiki iz takšnih ali drugačnih razlogov pogosto omenjajo.

Kolo W_n (ali **piramida**) je graf, ki ga dobimo s tem, da ciklu C_n dodamo točko, ki ji pravimo **vrh**, in jo zvežemo z vsemi točkami cikla. Slika 7.3 prikazuje kolesa W_3, W_4, W_5 in W_6.

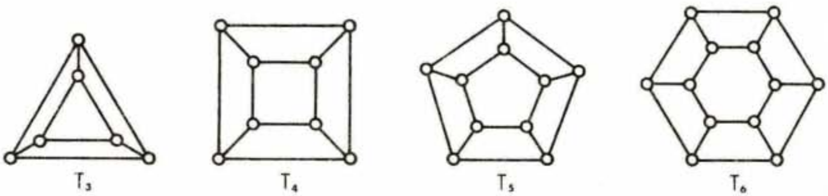


Slika 7.3

7.12. **Vaja:** Poišči vsa kolesa W_n, ki so (a) regularni grafi, (b) dvodelni grafi!

7.13. **Vaja:** Koliko točk in koliko povezav ima kolo W_n? Kakšne so stopnje točk v grafu W_n?

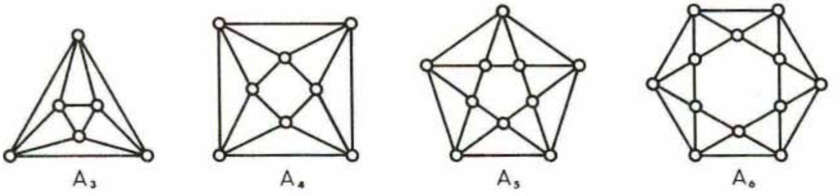
Prizma T_n je graf, ki je ogrodje n-strane prizme. Dobimo ga tako, da v dveh koncentričnih pravilnih n-kotnikih paroma zvežemo ustrezna oglišča. Slika 7.4 kaže prizme T_3, T_4, T_5 in T_6.



Slika 7.4

7.14. **Vaja:** Reši naloge iz 7.12 in 7.13 za grafe T_n!

Antiprizma A_n je graf, ki je ogrodje n-strane antiprizme. Dobimo ga tako, da vzamemo dva koncentrična pravilna n-kotnika. Zasukamo ju tako, da ima eden oglišča na sredini stranic drugega. Potem zvežemo vsako točko notranjega cikla z dvema najbljižjima točkama zunanjega cikla. Najbolje, da pogledamo sliko 7.5, ki kaže antiprizme A_3, A_4, A_5 in A_6.

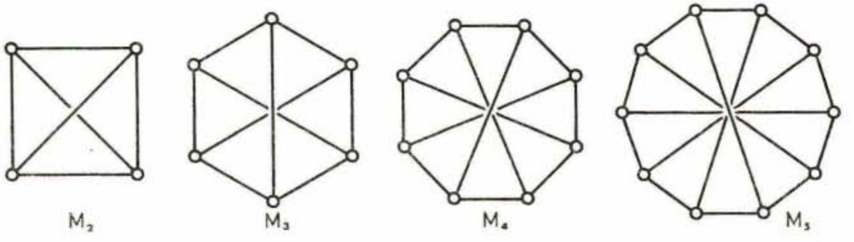


Slika 7.5

7.15. **Vaja:** Reši naloge iz 7.12 in 7.13 za grafe A_n!

7.16. **Vaja:** Kolika je dolžina najkrajšega in kolika dolžina najdaljšega cikla v grafih W_n, T_n in A_n?

Moebiusova lestvica M_n je graf, ki ga dobimo iz cikla C_{2n} tako, da zvežemo vsak par diametralno nasprotnih točk. Slika 7.6 prikazuje M_2, M_3, M_4, in M_5.



Slika 7.6

7.17. **Vaja:** Ponovi naloge 7.12, 7.13 in 7.16 za grafe M_n!

7.18. **Vaja:** Nariši grafe W_7, T_7, A_7 in M_7!

Kdor je rešil nalogi 7.8 in 7.10, je verjetno začutil, da je pojem regularnosti za nekatere družine grafov prav po mačehovsko prestrog. Na primer polni dvodelni grafi $K_{m,n}$ so tako lepi, da so skoraj regularni. Pa poskusimo ta pojem strožje zajeti.

Graf $K_{m,n}$ ima n točk stopnje m in m točk stopnje n. To bo naše izhodišče. V splošnem bomo rekli, da je graf G (m,n)-**polregularen**, če ima samo točke stopnje m in točke stopnje n. (m,m)-polregularni graf je regularni graf stopnje m. Ko bomo govorili o (m,n)-polregularnih grafih, bomo vedno privzeli, da je $m \geq n$.

7.19. **Zgled:** Ali je lahko drevo polregularen graf?

Lahko! Vsako drevo vsebuje točko stopnje 1. Zato je nujno polregularni graf oblike $(m,1)$. Primer $(m,1)$-polregularnega drevesa je kar $K_{m,1}$.

7.20. **Vaja:** Ali je kolo W_n polregularni graf?

7.21. **Vaja:** Za katera števila m in n obstajajo (m,n)-polregularna drevesa z 1985 točkami?

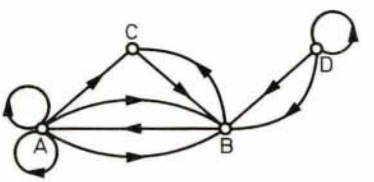
7.22. **Vaja:** Denimo, da ima $(4,1)$-polregularno drevo n točk stopnje 4. Koliko točk stopnje 1 ima? (Glej vajo 4.8)

7.23. **Vaja:** Pokaži, da je komplement regularnega grafa regularni graf. Ali je tudi komplement polregularnega grafa polregularen?

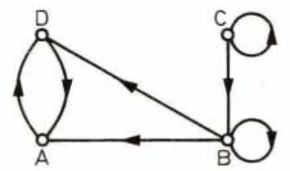
8. poglavje

USMERJENI GRAFI IN TURNIRJI

V prejšnjih poglavjih smo se posvečali enostavnim neusmerjenim grafom. V tem poglavju pa bomo govorili o usmerjenih grafih. To so taki grafi, ki imajo vse povezave usmerjene. (Glej sliko 8.1.)



Slika 8.1



Slika 8.2

Ne bomo se ukvarjali z najbolj splošnimi (usmerjenimi) grafi. Omejili se bomo na **enostavne usmerjene grafe.** To so usmerjeni grafi z največ eno zanko v vsaki točki in brez večkratnih povezav, ki potekajo v isti smeri; lahko pa sta dve točki povezani dvakrat, vendar v nasprotnih smereh. Glej sliko 8.2.

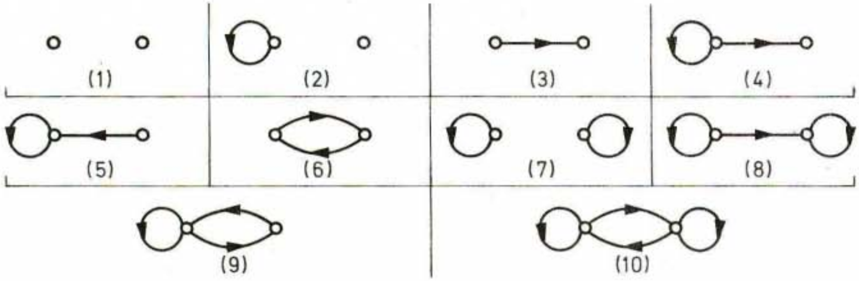
Usmerjeni graf na sliki 8.1 ni enostaven, ker sta v točki A dve zanki, ker vodita od D do B vzporedni povezavi in ker sta med A in B od treh povezav dve istosmerni. Graf na sliki 8.2 je enostaven usmerjeni graf, saj po ena zanka v B in C ne moti, niti ne motita povezavi med A in D, saj sta nasprotno usmerjeni.

Če v usmerjenem grafu nadomestimo vse povezave z neusmerjenimi, dobimo njegov **temeljni graf.** Temeljni graf je seveda neusmerjen. Če je temeljni graf enostaven, je tudi prvotni usmerjeni graf enostaven. Obratno pa ni res. Če je usmerjeni graf enostaven, ima njegov temeljni graf največ po eno zanko v vsaki točki in med dvema točkama največ po dve povezavi.

Odslej bomo **enostavnim usmerjenim grafom** rekli preprosto **usmerjeni grafi**. Podobno kot za neusmerjene lahko tudi pri usmerjenih grafih vpeljemo pojem izomorfizma.

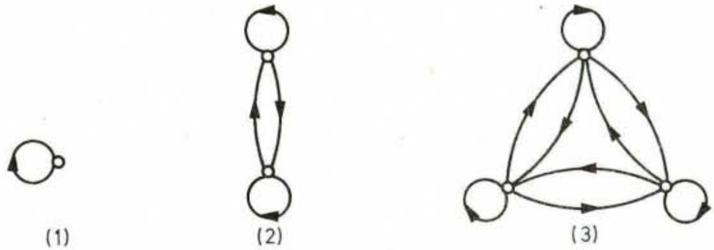
8.1. **Zgled**: Koliko neizomorfnih usmerjenih grafov na dveh točkah obstaja?

Na dveh točkah obstaja 10 neizomorfnih usmerjenih grafov, ki jih kaže slika 8.3.



Slika 8.3

Usmerjeni graf je **poln**, če ima vse možne povezave; to je tedaj, ko ima vsaka točka zanko in med poljubnima različnima točkama obstajata obe nasprotno usmerjeni povezavi. Slika 8.4 prikazuje polne usmerjene grafe na eni, dveh in treh točkah.



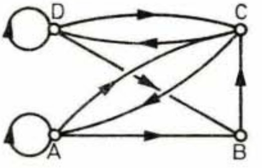
Slika 8.4

8.2. **Vaja**: Koliko povezav ima polni usmerjeni graf na n točkah?

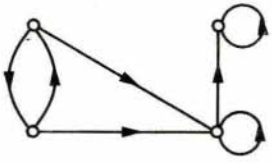
Podobno kot smo pri neusmerjenih grafih govorili o komplementu, lahko ta pojem prenesemo na usmerjene grafe.

8.3. **Zgled**: Poišči komplement usmerjenega grafa na sliki 8.2!
Rešitev prikazuje slika 8.5.

Nasprotni graf G^* usmerjenega grafa G ima isti temeljni graf, toda nasprotno usmerjene povezave.



Slika 8.5



Slika 8.6

8.4. **Zgled**: Poišči nasprotni graf usmerjenega grafa na sliki 8.2!
Rešitev prikazuje slika 8.6.

8.5. **Vaja**: Ali obstaja kakšen usmerjeni graf, ki je izomorfen svojemu komplementu? Ali obstaja kakšen usmerjeni graf, ki je nasproten samemu sebi? Ali obstaja kakšen usmerjeni graf, ki je hkrati komplementaren in nasproten samemu sebi?

Graf, ki je nasproten samemu sebi, imenujemo **simetrični graf**. Odlikuje ga lastnost, da med poljubnima njegovima točkama bodisi ni povezave ali pa da sta dve nasprotno usmerjeni povezavi.

Vsakemu neusmerjenemu grafu lahko na en sam način priredimo simetrični usmerjeni graf brez zank tako, da vsako neusmerjeno povezavo nadomestimo s parom nasprotno usmerjenih povezav. Obratno lahko vsakemu simetričnemu usmerjenemu grafu brez zank priredimo neusmerjeni graf tako, da par nasprotnih povezav nadomestimo z neusmerjeno povezavo. Zato so v nekem smislu neusmerjeni grafi isto kot simetrični grafi brez zank.

Pri neusmerjenih grafih smo govorili o stopnji posameznih točk. Če je graf usmerjen, ni vseeno, če se povezava v točki začne ali če se v njej konča. Zato se tu vsiljuje drugačna definicija. Število vseh povezav z začetkom v točki A imenujemo **izhodna stopnja (odstopnja)** $d^+(A)$. Število vseh povezav s koncem v točki A imenujemo **vhodna stopnja (dostopnja)** $d^-(A)$.

Domenimo se še, da zanka v A prispeva 1 k $d^+(A)$ in prav tako 1 k $d^-(A)$.

8.6. **Zgled**: Kolike so stopnje točk na grafu na sliki 8.2?

$d^+(A) = 1$, $d^+(B) = 3$, $d^+(C) = 2$, $d^+(D) = 1$, $d^-(A) = 2$, $d^-(B) = 2$, $d^-(C) = 1$, $d^-(D) = 2$.

Če poznamo vhodne in izhodne stopnje točk kakega grafa, jih lahko na preprost način izračunamo tudi za točke nasprotnega grafa. Ker v nasprotnem grafu dosledno obrnemo smeri povezav, se za vsako točko števili d^+ in d^- zamenjata.

8.7. **Trditev**: Če v usmerjenem grafu seštejemo vhodne stopnje vseh točk, dobimo isto število, kot če seštejemo izhodne stopnje vseh točk, to pa je ravno število povezav.

Dokaz: Ko preštejemo začetke vseh povezav, dobimo ravno vsoto vseh izhodnih stopenj. Ko preštejemo konce vseh povezav, dobimo vsoto vseh vhodnih stopenj. Odtod neposredno sledi trditev.

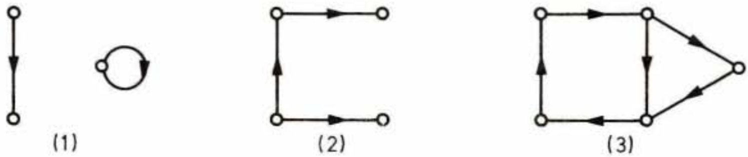
Pojma poti in cikla se zelo enostavno preneseta od neusmerjenih na usmerjene grafe. Usmerjeno pot $\vec{P}_n$ dobimo tako, da usmerimo povezave na poti P_n vzdolž poti od enega krajišča proti drugemu. Podobno dobimo usmerjeni cikel $\vec{C}_n$ iz C_n. Slika 8.7 prikazuje $\vec{P}_4$ in $\vec{C}_5$.

Slika 8.7

Več možnosti imamo za pojem povezanosti. Usmerjeni graf je **šibko povezan**, ko je njegov temeljni graf povezan. Usmerjeni graf je **krepko povezan**, če za poljubni točki X in Y obstaja usmerjena pot, ki ima X za začetek in Y za konec.

Jasno je, da je vsak krepko povezani graf tudi šibko povezan. Zlahka se dokaže, da je simetrični graf krepko povezan natanko takrat, ko je šibko povezan. Ni pa poljuben šibko povezani graf tudi krepko povezan. Na sliki 8.8. usmerjeni graf (1) ni šibko povezan, graf (2) je šibko povezan, ne pa krepko in graf (3) je krepko povezan.

Če za kako točko A usmerjenega grafa velja $d^+(A) = 0$ ali $d^-(A) = 0$, tedaj graf gotovo **ni** krepko povezan.

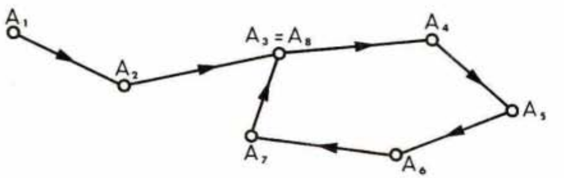


Slika 8.8

8.8. **Vaja**: Poišči šibko povezani graf, ki ni krepko povezan in za vsako njegovo točko X velja $d^+(X) > 0$ in $d^-(X) > 0$.

8.9. **Trditev**: Če za vsako točko X usmerjenega grafa velja $d^+(X) > 0$, tedaj graf vsebuje usmerjeni cikel.

Dokaz: Naj bo A_1 poljubna točka grafa. Ker je $d^+(A_1) > 0$, obstaja povezava z začetkom v A_1. Naj bo A_2 konec te povezave. Ker je tudi $d^+(A_2) > 0$, lahko postopek ponovimo v A_2. Tako dobimo A_3 in tako dalje. Ker je v grafu točk končno mnogo, se v zaporedju A_1, A_2, A_3, ... začnejo točke ponavljati. Tako dobimo usmerjen cikel. Poseben primer, ko je $A_8 = A_3$, prikazuje slika 8.9.



Slika 8.9

Svojo pozornost izkažimo **turnirjem**. Dobimo jih iz neusmerjenih polnih grafov, tako da vse povezave usmerimo. Ime je posrečeno - spomnimo se teniških turnirjev, na katerih vsak udeleženec igra z vsakim do zmage enega ali drugega. Običajnih šahovskih turnirjev pa graf turnir ne predstavlja, saj so na šahovskih turnirjih možni tudi remiji.

Podobnost nam omogoča, da si od pravih turnirjev izposodimo še drugo izrazje. Tako bomo točkam lahko rekli kar **udeleženci** in namesto 'od A do B je usmerjena povezava' dejali 'udeleženec A je premagal udeleženca B'. Tudi izhodno stopnjo $d^+(A)$ lahko proglasimo za **število zmag** udeleženca A. Prav tako se bo število $d^-(A)$ lahko glasilo **število porazov** udeleženca A. In končno bomo razvrstitvi točk po padajočih izhodnih stopnjah preprosto rekli **lestvica.**

8.10. **Vaja:** Nariši vse turnirje z dvema in tremi udeleženci!

8.11. **Vaja:** Koliko je turnirjev s štirimi udeleženci? Koliko jih je z n udeleženci?

8.12. **Vaja:** Na turnirjih na sliki 8.10 poišči vse izhodne in vse vhodne stopnje! Sestavi lestvico!

Slika 8.10

8.13. **Vaja:** Kolikšna je vsota vseh števil na lestvici turnirja z n udeleženci? Katero je lahko največje število na taki lestvici? Sta na lestvici lahko dve ničli?

8.14. **Vaja:** Koliko je neizomorfnih turnirjev z dvema, tremi in štirimi udeleženci?

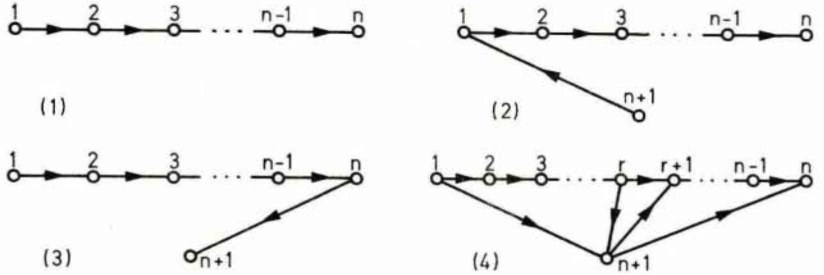
Lestvica je razvrstitev udeležencev. Lahko se zgodi, da je udeleženec X v tej razvrstitvi neposredno pred udeležencem Y, čeprav je v njunem srečanju zmagal Y. Zato je razvrstitev, ki jo prinaša lestvica, le do neke mere zanimiva. Bolj zanimivo bi bilo v turnirju poiskati take lestvice, da je vsak udeleženec premagal tistega, ki mu v tej lestvici neposredno sledi. Drugače povedano: zanima nas, ali je mogoče vse točke turnirja povezati z usmerjeno potjo? V usmerjenem grafu pravimo taki usmerjeni poti, ki vsebuje vse točke grafa, **usmerjena Hamiltonova pot.**

8.15. **Vaja:** Poišči nekaj Hamiltonovih poti na grafih na sliki 8.10.

Nič čudnega, da nam je pri teh zgledih vedno uspelo, saj velja naslednji izrek.

8.16. **Izrek:** Vsak turnir premore Hamiltonovo pot.

Dokaz: Za najenostavnejši turnir, turnir z dvema udeležencema, izrek velja. Iskana razvrstitev sovpada z ono, ki jo prinaša lestvica. Vzemimo, da je izrek dokazan za vse turnirje z n udeleženci. Ali se da od tod dokazati, da izrek drži tudi za turnirje z (n + 1) udeleženci?



Slika 8.11

Vzemimo turnir z n+1 udeleženci. Prvih n udeležencev sestavlja manjši turnir, v katerem obstaja po induktivni predpostavki Hamiltonova pot. Na sliki 8.11(1) smo to pot narisali. Pri tem smo izpustili vse druge povezave turnirja in smo izbrali oznake točk.

Udeleženec n+1 je igral z vsemi drugimi udeleženci. Pri tem je izpolnjena ena od naslednjih treh možnosti:

1. Udeleženec n+1 je premagal udeleženca 1 (slika 8.11(2)). V tem primeru vključimo udeleženca n+1 na prvo mesto in dobimo Hamiltonovo pot n+1, 1, 2, ..., n-1, n.

2. Udeleženec n+1 je izgubil z udeležencem n (slika 8.11(3)). Raztegnjena razvrstitev je sedaj: 1, 2, 3, ... n-1, n, n+1.

3. Če ne velja nobena od prvih dveh možnosti (slika 8.11(4)), je udeleženec n+1 premagal udeleženca n in izgubil z udeležencem 1. To pa

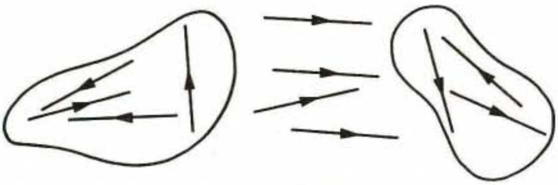
pomeni, da obstaja na poti od 1 do n udeleženec r, ki je zadnji premagal n+1, že naslednji udeleženec r+1 pa je z njim izgubil. Iz razvrstitve n udeležencev črtamo povezavo (r, r+1) in jo nadomestimo s povezavama (r, n+1) in (n+1, r+1). Tako dobimo zaželeno razvrstitev:

1, 2, 3, ... r, n+1, r+1, ... n.

Izrek je dokazan.

Da se dokazati, da je prvouvrščeni vse nasprotnike neposredno premagal ali pa, če tega ni storil in je n.pr. z B izgubil, je zagotovo premagal nekega C, ki je premagal B. Če ne v enem koraku, neposredno, je torej posredno samo v dveh korakih premagal vse ostale udeležence.

Če smo se z izrekom 8.16 nekako vživeli v prvouvrščenega, nam bo v naslednjem izreku bolj pri srcu problematika zadnjeuvrščenega. Zgodi se, da se na pravem turnirju zadnjeuvrščeni lahko tako potolaži: 'Zadnji sem res, toda premagal sem A, ta je premagal B ... in ta je premagal samega prvaka.' Kdaj se to zgodi? Prav gotovo je to takrat, ko je vse točke turnirja mogoče povezati z usmerjenim ciklom, ki mu pravimo usmerjeni Hamiltonov cikel. Pred izrekom še definicija: **tepena skupina** S turnirja T je podmnožica udeležencev, ki so izgubili vsa srečanja z udeleženci, ki niso iz S. Naj nam bo dovoljen primer: avtorja te knjige in bralec, ki jo trenutno bere, bi na svetovnem teniškem prvenstvu hočeš nočeš sestavljali tepeno skupino. Turnir bi pravzaprav razpadel na dva: turnir pravih, močnih udeležencev in turnir nas treh šibkih udeležencev. Zato se turnirju s tepeno skupino tudi pravi **razcepni** turnir, turnir, ki take tepene skupine ne premore, pa je **nerazcepni**. Slika 8.12 shematično prikazuje razcepen turnir.

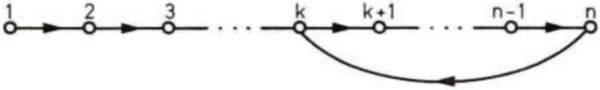


Slika 8.12

Razume se, da tepena skupina lahko sestoji iz enega samega udeleženca, če je ta prav z vsemi izgubil, iz dveh ... ali iz n - 1 udeleženca. Ta zadnji posebni primer nastopi takrat, ko je prvouvrščeni premagal prav vse nasprotnike.

8.17. **Izrek:** Vsak nerazcepni turnir premore Hamiltonov cikel.

Dokaz: Po prejšnjem izreku obstaja Hamiltonova pot: 1, 2, 3, ... n-1, n. Zadnji udeleženec v tej razvrstitvi (n) je seveda izgubil z (n-1), ni pa mogel izgubiti z vsemi ostalimi udeleženci, saj bi tedaj sam sestavljal tepeno skupino. Torej obstaja vsaj en udeleženec, imenujmo ga k, s katerim je n zmagal (glej sliko 8.13).



Slika 8.13

To pa pomeni, da v turnirju obstaja usmerjeni cikel C = k, k+1, ... n-1, n, k. Dokaz bo v tem, da bomo ta cikel postopoma razširili na vse udeležence in tako dobili iskani Hamiltonov cikel. Pri tem bomo izkoristili samo predpostavko, da v našem turnirju ni tepenih skupin.

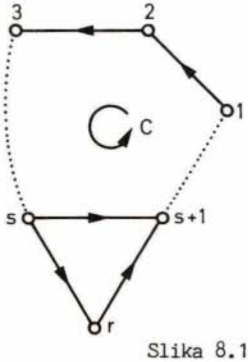
Udeležence, ki so ostali zunaj C bomo razdelili v tri skupine:

1) v udeležence, ki so z nekaterimi udeleženci cikla C zmagali, z nekaterimi pa izgubili,

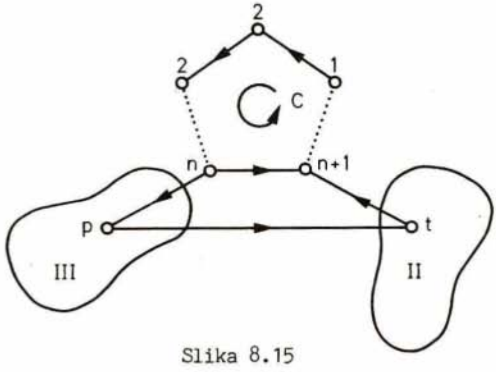
2) v udeležence, ki so premagali prav vse udeležence cikla C,

3) v udeležence, ki so izgubili prav z vsemi udeleženci cikla C.

Začnimo pri prvi skupini! Naj bo r udeleženec te skupine. Tedaj morata biti v ciklu C taka sosedna udeleženca s in s + 1, da je s premagal r, s + 1 pa je izgubil z r (glej sliko 8.14).



Slika 8.14



Slika 8.15

Če iz C črtamo povezavo s, $s+1$ in na njeno mesto postavimo pot s, r, $s+1$, smo cikel C razširili na cikel C', ki vsebuje novega udeleženca r. S podobnimi zaporednimi razširitvami izčrpamo vso prvo skupino, katere udeleženci se tako znajdejo v razširjenem ciklu C^*.

Preostaneta nam druga in tretja skupina. Udeleženci druge in tretje skupine niso igrali samo z udeleženci cikla C, igrali so tudi med sabo. Je mogoče, da bi vsi udeleženci druge skupine premagali vse udeležence tretje skupine? Ne, ko bi bilo tako, bi tretja skupina bila tepena skupina, to pa ne sme biti. Sledi, da obstaja v tretji skupini tak udeleženec p, ki je premagal vsaj enega udeleženca t druge skupine (glej sliko 8.15).

Toda tako se da cikel C^* razširiti: črtamo iz njega povezavo n, n+1, namesto nje vrinemo n, p, t, n+1 in cikel se obogati za dva udeleženca. S postopnimi razširitvami se še drugi udeleženci druge in tretje skupine znajdejo v ciklu, ki je, ker pač obsega prav vse udeležence turnirja, njegov Hamiltonov cikel. Dokaz je končan.

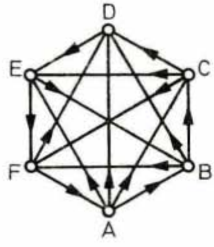
Včasih je težko ugotoviti, ali v danem turnirju, posebno če ima ta dosti udeležencev, tepena skupina obstaja ali ne in ali zato turnir premore Hamiltonov cikel ali ne. Zato nam marsikdaj pride prav naslednji izrek, ki ga tu podajamo brez dokaza.

8.18. **Izrek:** Če je razlika med točkami (na lestvici) prvouvrščenega in točkami zadnjeuvrščenega manjša od polovice udeležencev turnirja, premore turnir Hamiltonov cikel.

Posebej poudarimo, da je pogoj sicer zadosten, nikakor pa ni potreben. Prav lahko se namreč zgodi, da premore turnir Hamiltonov cikel, zgornji neenakosti pa ni zadoščeno.

8.19. **Zgled:** Za preizkus izreka uporabimo podatke turnirja na sliki 8.10(1). Ker velja $3 - 1 < 5/2$, mora ta turnir imeti Hamiltonov cikel. In res: tak je cikel ADEBCA.

8.20. **Zgled:** Na sliki 8.16 je prikazan drug turnir. Ker je sedaj $4-1=6/2=3$, pogoju izreka ni zadoščeno. To ne pomeni, da turnir nima Hamiltonovega cikla. Pa saj ga ima: tak cikel je ABCDEFA.



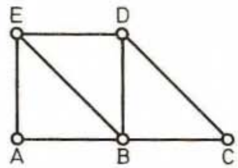
Slika 8.16

9. poglavje

EULERJEVI OBHODI

V tem poglavju se bomo posvetili posebnim sprehodom in obhodom v grafu, ki so v tesni zvezi z risanjem grafa.

9.1. **Zgled:** Graf na sliki 9.1 ima med drugimi sprehod AEBCDEB, ki ima začetek v točki A, konec v točki B, ki ni enostaven, saj se povezava EB v njem ponovi. Sprehod ABDEBC je enostaven sprehod, ki pa ni pot, saj se točka B ponovi. Sprehod AEBDC je pot. Sprehod ABEDBEA je obhod, saj se začne in konča v točki A. Obhod BAEBDCB je enostaven, ni pa cikel. Obhod ABCDEA pa je cikel. Obhod ABEABEA ni niti enostaven, kaj šele cikel.



Slika 9.1

Obhod ABCDBEDEA izčrpa vse povezave grafa na sliki 9.1, ni pa enostaven. V njem se povezava ED ponovi. Če s svinčnikom na papirju sledimo temu obhodu, lahko sicer narišemo graf, vendar pri tem narišemo povezavo ED dvakrat. Vprašanje pa je, ali lahko graf na sliki 9.1 narišemo **z eno potezo.** To pomeni, da ga narišemo tako, da svinčnika med risanjem ne dvignemo od papirja in nobene povezave ne rišemo dvakrat. Z drugimi besedami: ali ima ta graf kakšen enostaven sprehod, ki izčrpa vse povezave? S poskušanjem lahko najdemo sprehod EABEDBCD, s katerim lahko graf narišemo v eni potezi. Zaman pa bi iskali obhod s to lastnostjo. Na tem mestu bomo to lastnost posebej poimenovali. **Eulerjev obhod** grafa G je enostaven obhod, ki vsebuje vse povezave grafa G. **Eulerjev sprehod** grafa G je enostaven sprehod, ki vsebuje vse povezave grafa G.

Graf, ki premore Eulerjev obhod, je mogoče začenši pri poljubni točki prerisati tako, da gremo enkrat in samo enkrat po vsaki povezavi, ne da bi morali kdaj vzdigniti pero, in se na koncu znajdemo v začetni točki.

Kdaj graf G premore Eulerjev obhod? Preden si potešimo radovednost, rešimo naslednje vaje.

9.2. **Vaja:** Nariši vse povezane grafe z največ osmimi povezavami, ki imajo same sode točke!

9.3. **Vaja:** Nariši vse povezane grafe z največ petimi povezavami, ki nimajo samih sodih točk!

9.4. **Vaja:** Poišči morebitne Eulerjeve obhode na grafih vaje 9.2!

9.5. **Vaja:** Napravi isto za grafe vaje 9.3!

Če smo vestno rešili zadnje vaje, morda že slutimo naslednji izrek.

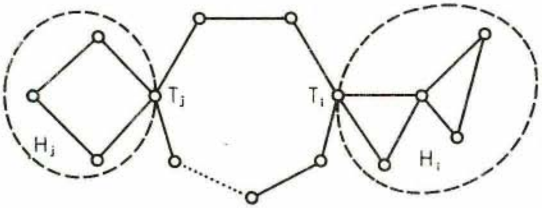
9.6. **Izrek:** Neusmerjeni povezani graf premore Eulerjev obhod natanko takrat, ko so vse stopnje njegovih točk sode.

Dokaz:: Izrek bomo dokazali v obeh smereh. Začnimo s prvo smerjo. Če povezani graf G premore Eulerjev obhod, tedaj so vse točke grafa sode.

Začnimo obhod pri točki T. Vsakokrat, ko gremo skozi kakšno točko, porabimo dve povezavi: eno, ko vanjo pridemo, in drugo, ko jo zapustimo. Ker po predpostavki Eulerjev obhod obstaja, se nam ne sme nikjer zatakniti. Zato ne sme nobena točka imeti stopnje 1: že ko bi jo prvič dosegli, bi ne mogli naprej. Prav tako ne bi mogli naprej, če bi točka imela stopnjo 3: prvič bi nam šlo gladko, ko pa bi točko drugič dosegli, bi se ustavili. Podoben sklep velja za vsako točko lihe stopnje. Izjema je točka T. Ko smo jo prvič zapustili, je prispevala eno povezavo, ko smo jo drugič, tri, itd. Toda ko obhod zaključimo v točki T, vanjo samo pridemo in je ne zapustimo več. To povezavo prištejemo dosedanjemu lihemu številu in dobimo tudi za točko T sodo stopnjo.

V nasprotno smer pa dokažemo izrek z matematično indukcijo po številu povezav m.

V vaji 9.4 smo se prepričali, da za najnižje vrednosti števila m izrek velja. Vzemimo sedaj, da izrek velja za vse grafe z m ali manj povezavami. Vzemimo graf G z m+1 povezavami, ki zadošča pogojem izreka! Ker je povezan in so stopnje vseh njegovih točk sode, imajo vse njegove točke vsaj stopnjo 2. Iz posledice 4.6 sledi, da G vsebuje cikel, na primer C. Zbrišimo povezave cikla C! Dobimo podgraf H prvotnega grafa G. H ima manj povezav kot G, lahko pa je nepovezan. Naj bodo H_1, H_2, ..., H_k njegove komponente. Vsaka njegova komponenta H_i mora imeti vsaj eno točko na C. Taka točka je pri brisanju povezav cikla izgubila dve povezavi. Vsaka komponenta H_i zadošča pogoju, da je povezana in da imajo vse njene točke sodo stopnjo. Ker je število povezav vsake komponente H_i gotovo manjše od m, premore po hipotezi indukcije vsak graf H_i Eulerjev obhod.



Slika 9.2

Pomikajmo se po povezavah cikla C, dokler ne naletimo na točko kakšne izmed komponent H_i grafa H. To točko imenujemo po komponenti T_i. Zavijmo v komponento H_i! Opišimo njen Eulerjev obhod in se vrnimo v T_i. Nato nadaljujmo po ciklu C, dokler spet ne naletimo na točko T_j kakšne komponente H_j. Postopek ponavljajmo, vse dokler se ne vrnemo v začetno točko cikla C. Ko smo to storili, smo opisali Eulerjev obhod po celem grafu G. Dokaz je končan.

9.7. **Vaja**: Kateri polni grafi premorejo Eulerjev obhod?

9.8. **Zgled**: Primer za Eulerjev obhod je partija domine, ki se izide. Graf ima 7 točk: števila 0, 1, 2, ..., 6. Njegove povezave so posamezne domine. Ker obstajajo vse domine (i,j), kjer je i = 0, 1, ..., 6 in j = 0, 1, ..., 6, je ta graf polni graf K_7, ki ima povrh v vsaki točki zanko. Stopnja vsake točke (če zanko izvzamemo) je 6. Zato po pravkar dokazanem izreku premore graf Eulerjev obhod. Tak Eulerjev obhod je partija domine, pri kateri se ni zataknilo.

9.9. **Vaja:** Odstrani iz igre vse dvojne domine (0, 0), (1, 1) ... (6, 6) in vse domine, ki vsebujejo ničlo. Kaj misliš, se partija tako skrčene domine mora vedno izteči ali se pri njej včasih ali celo vedno zatakne?

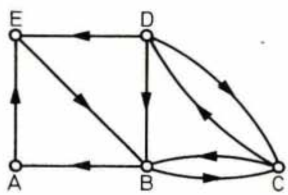
9.10. **Vaja:** Kateri od naslednjih grafov premorejo Eulerjev obhod: W_n, T_n, A_n in M_n?

Ko igramo domino, nas v resnici ne zanima, če se zadnja domina v vrsti lahko poveže s prvo. Podobno nas tudi pri risanju grafa z eno potezo ne zanima, če risbo končamo v točki, kjer smo pero postavili na papir. To pomeni, da nas ne zanima Eulerjev obhod, ampak sprehod. O tem pa govori naslednja posplošitev izreka 9.6.

9.11. **Izrek:** Neusmerjeni povezani graf premore Eulerjev sprehod natanko takrat,ko ima kvečjemu dve lihi točki.

Dokaz: Če ima graf same sode točke, velja izrek 9.6. Ene lihe točke graf ne more imeti zaradi posledice 3.4. Če ima graf dve lihi točki, recimo A in B, dodamo povezavo AB in dobimo graf s samimi sodimi točkami. Po izreku 9.6 obstaja v njem Eulerjev obhod. Tega pa lahko spremenimo v sprehod od A do B, če dodatno povezavo AB spet zbrišemo. Če pa ima osnovni graf več kot dve lihi točki, zanj ne obstaja Eulerjev sprehod. O tem se lahko prepričamo s podobnim razmislekom kot v dokazu izreka 9.6. Graf, ki ga v dokazu konstruiramo, ni nujno enostaven. Kljub temu pa izrek velja, saj velja izrek 9.6 tudi za splošne grafe.

Pred koncem pa še nekaj besed o Eulerjevih obhodih na usmerjenih grafih. Usmerjene sprehode, obhode, poti in cikle definiramo na usmerjenih grafih na podoben način kot na neusmerjenih. **Usmerjeni sprehod** je zaporedje

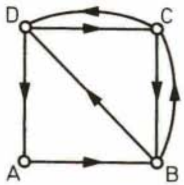


Slika 9.3

točk T_1, T_2, ..., T_n usmerjenega grafa in usmerjene povezave vodijo od točke T_1 do točke T_2, od točke T_2 do točke T_3, ..., od točke T_{n-1} do točke T_n.

9.12. **Zgled:** Na sliki 9.3 sta AEBC in BCDE usmerjeni poti, EBCDE je usmerjen cikel, CBAEB je enostaven sprehod, BAEBCDCB pa je enostaven obhod. Graf gotovo nima Eulerjevega sprehoda, saj ima na primer točka D izhodno stopnjo 3, vhodno pa 1. Brez dokaza povejmo, kateri usmerjeni grafi premorejo Eulerjev obhod.

9.13. **Izrek:** Usmerjeni graf vsebuje Eulerjev obhod, če in samo če je povezan in je za vsako njegovo točko izhodna stopnja enaka vhodni stopnji.



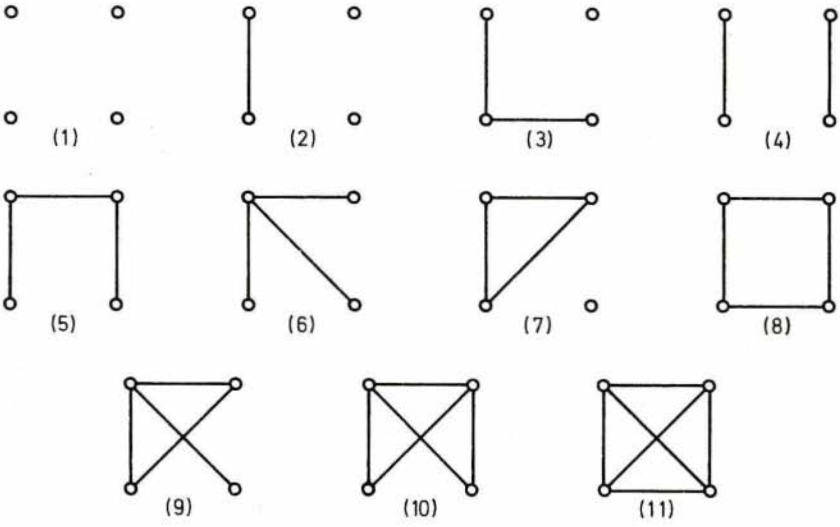
Slika 9.4

9.14. **Zgled:** Graf na sliki 9.4 premore Eulerjev obhod, n.pr. ABCDCBDA. Pogoju izreka 9.13 je zadoščeno, saj je $d^+(A) = d^-(A) = 1$, $d^+(B) = d^-(B) = 2$, $d^+(C) = d^-(C) = 2$, $d^+(D) = d^-(D) = 2$

10. poglavje

REŠITVE NALOG

2.4. Na štirih točkah obstaja 11 neizomorfnih grafov. To so grafi na sliki 10.1



Slika 10.1

2.5. Najprej v mislih narišimo vse možne povezave med n točkami! Po formuli (2.1) je teh $n(n-1)/2$. Za vsako od teh povezav imamo dve možnosti: da jo obdržimo ali da jo zbrišemo, in to neodvisno od ostalih. Vsaka izbira nam da različen graf, zato je iskano število enako: $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot2$, kjer je število dvojk enako $n(n-1)/2$. Zato na n točkah obstaja $2^{n(n-1)/2}$ grafov.

2.6. Grafa (1) in (3) sta izomorfna. Eno izmed možnih preimenovanj je :

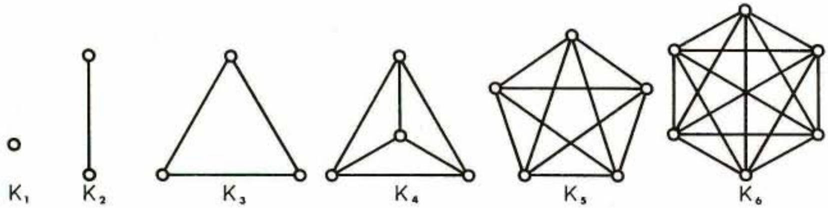
A → I , B → J , C → K , D → L.

Grafi (2), (4) in (5) so izomorfni. To uvidimo že od tod, ker je vsak izmed njih polni graf K_4. Ker so pri polnem grafu vse točke enakovredne, je vsako preimenovanje sprejemljivo.

Grafi (6), (7) in (8) niso izomorfni z nobenim od prejšnjih, ker imajo različno število točk. Tudi med sabo niso izomorfni, saj ima na grafu (6) točka C 5 sosedov (D,E,F,A in B), nobene take točke pa ne premoreta graf (7) in (8). Po drugi strani ima graf (7) točko L s štirimi sosedi, graf (8) pa take točke nima.

Od osmih grafov na sliki 2.8 je tako 5 neizomorfnih.

2.7. Rešitev prikazuje slika 10.2.



Slika 10.2

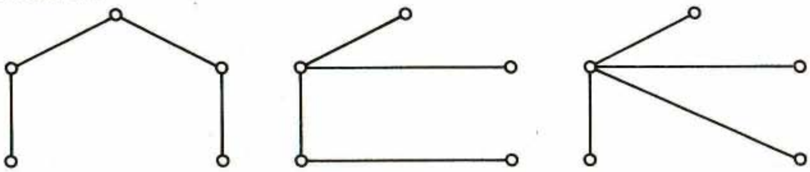
3.2. Točke A, D, E in G imajo stopnjo dva, ostale točke pa imajo stopnjo ena.

3.6. V grafu na sliki 3.1 je deset podgrafov enakih P_3. To so ACE, AEC, AEB, AED, BED, BDE, BEC, CAE, CED, DBE. Osem podgrafov je enakih P_4. To so AEDB, AEBD, ACEB, ACED, CEBD, CEDB, CAEB, CAED. Štirje podgrafi so enaki P_5. To so ACEBD, ACEDB, CAEBD, CAEDB.

3.8. V grafu na sliki 3.5 obstajajo naslednji cikli: AEFBA , BFGCB , CGHDC , AEFGCBA , BFGHDCB , AEFGHDCBA .

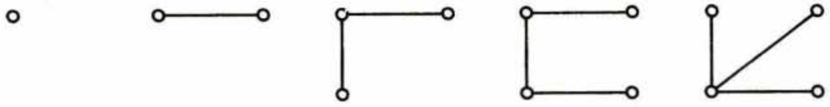
3.10. Točke A, D in E določajo prvo komponento, točki B in F drugo, točke C, G in H pa tretjo komponento.

3.13. Slika 10.3 kaže vse povezane grafe s petimi točkami in štirimi povezavami.



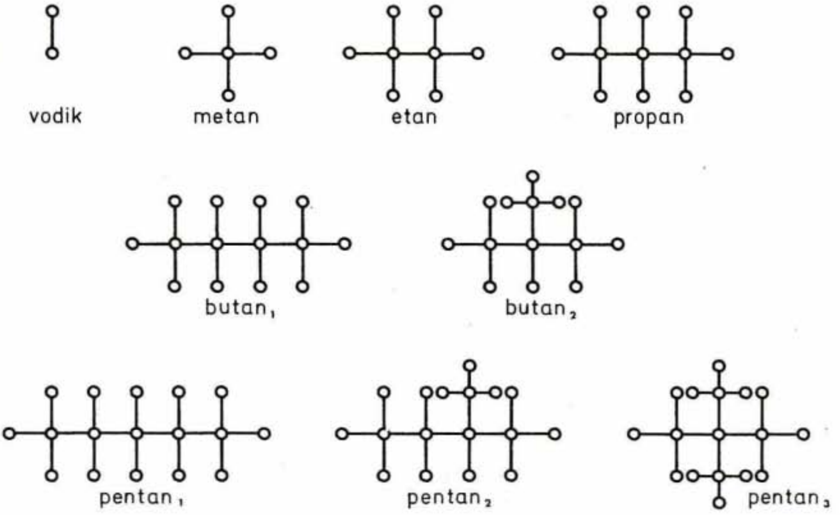
Slika 10.3

3.14. Na sliki 10.4 so vsi zahtevani grafi. Opazimo, da nobeden med njimi ne vsebuje cikla.



Slika 10.4

4.8. Slika 10.5 prikazuje najmanjših 9 dreves, v katerih imajo točke stopnjo 1 ali 4.



Slika 10.5

V kemiji podkovan bralec je v vseh teh grafih (razen prvega, ki je molekula vodika) prav gotovo prepoznal ogljikovodike. Točke stopnje 1 so atomi vodika, točke stopnje 4 pa atomi ogljika. Iz risb lepo razberemo, da obstaja ena sama vrsta metana CH_4 , etana C_2H_6 in propana C_3H_8 , da pa obstajata dve vrsti butana C_4H_{10} (izomeri) in tri vrste pentana C_5H_{12}. Zato ni čudno, da je prav kemija spodbudila - pred dobrimi sto leti - prve raziskave dreves. Bralca opozarjamo, da smo pri butanu in pentanu zapisali indekse čisto poljubno, ker želimo izomere zgolj razločevati, medtem ko je ustaljeno kemijsko poimenovanje teh izomer drugačno, bolj natančno in zamotano. Ime spojine mora namreč vsebovati vso informacijo, ki kemiku omogoča zapisati strukturno formulo (graf) molekule.

4.9. Naj bo x število točk stopnje 1 . Vseh točk je zato $x+10$. Ker imamo opravka z drevesom , mora biti povezav $x+9$.

To število pa lahko izračunamo tudi drugače. Iz vsake od x točk štrli po ena povezava, iz vsake od 10 točk po štiri. Skupno bi dobili $x+40$ povezav. Ker pa smo vsako povezavo šteli dvakrat, je to število treba deliti z 2 in dobimo $(x+40)/2$. Izenačimo oba izraza in rešimo enačbo $x+9=(40+x)/2$; rešitev je 22. Toliko je točk stopnje 1 v našem drevesu. Drevo ima 31 povezav.

5.4. Ti grafi imajo naslednje stopnje točk. Če je število točk grafa sodo $(2r)$:

A) 1 2 3 ... r r ... (2r-2) (2r-1)

B) 0 1 2 ... (r-1) (r-1) ... (2r-2)

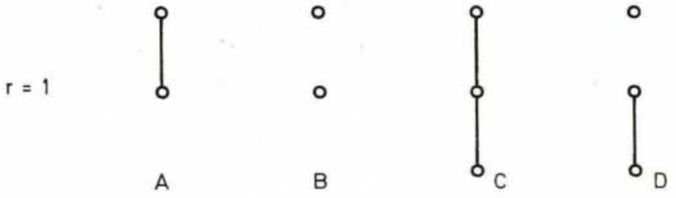
Če je število točk grafa liho $(2r+1)$:

C) 1 2 3 ... r r ... (2r-1) (2r)

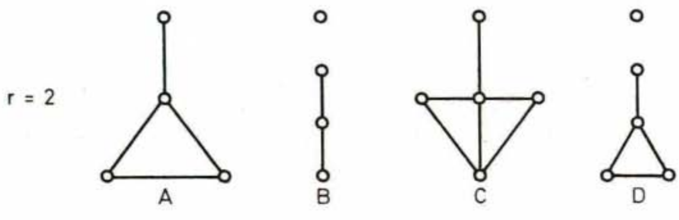
D) 0 1 2 ... r r ... (2r-1)

Izkaže se, da je za vsak r le en graf tipa A, B, C in D. Pri tem je B komplement A, D pa komplement C. To je mogoče dokazati z matematično indukcijo.

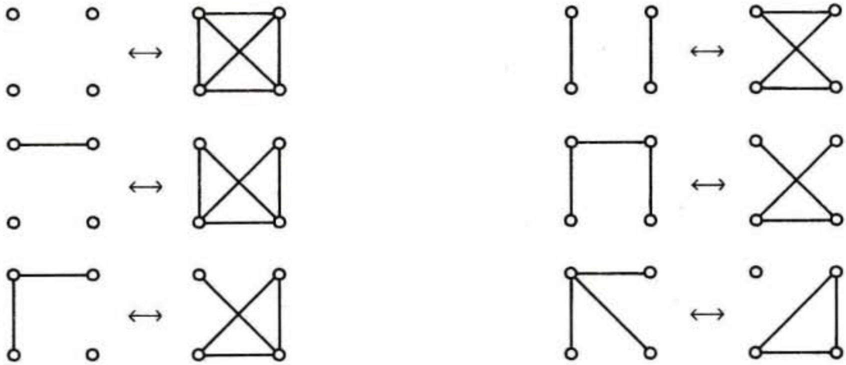
Slika 10.6 prikazuje najmanjših osem grafov ($r = 1$ in $r = 2$).



Slika 10.6



5.7. Na sliki 10.7 pomeni puščica $\leftrightarrow$ med dvema grafoma, da sta grafa komplementarna.

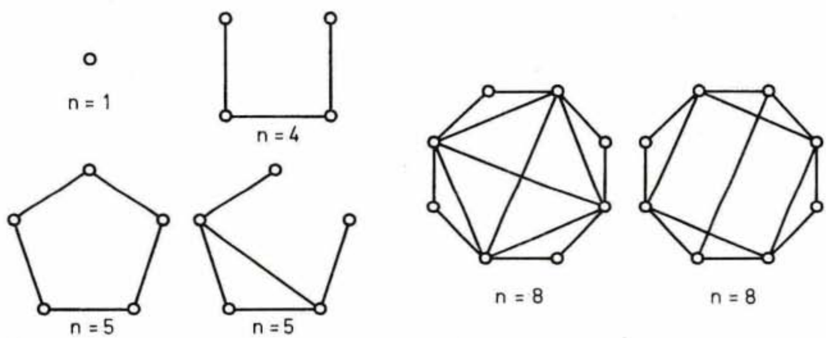


Slika 10.7

Na štirih točkah je 11 neizomorfnih grafov. Eden med njimi je izomorfen svojemu komplementu (je sebi komplementaren).

5.8. G in $\overline{G}$ imata skupaj $n(n-1)/2$ povezav. Če sta izomorfna, morata imeti enako število povezav, torej vsak po $n(n-1)/4$. To število mora biti naravno število. Zato mora biti bodisi $n = 4, 8, 12 \ldots$ bodisi $n = 1, 5, 9, 13 \ldots$ Matematiki so za vsak n, ki zadošča temu pogoju, uspeli tudi konstruirati samemu sebi komplementaren graf na n točkah.

5.9. Po prejšnji nalogi prihajajo v poštev le naslednje vrednosti za število točk n: n = 1, 4, 5, 8. S preizkušanjem najdemo grafe na sliki 10.8



Slika 10.8

6.1. Graf (1) vsebuje cikle dolžine 3, 4, 5 in 6, graf (2) vsebuje cikle dolžine 4, 6 in 8, graf (3) ne vsebuje nobenega cikla, graf (4) pa vsebuje cikle dolžine 5, 6, 8 in 9.

6.2. (1): P_6 , (2): P_8 , (3): P_7 , (4): P_{10}.

Kot vidimo iz prejšnje naloge, ne velja, da graf vsebuje manjše cikle C_{n-1}, C_{n-2}, ... C_3, brž ko vsebuje C_n.

6.3. Eno od preimenovanj je: $1 \to G$, $2 \to I$, $3 \to K$, $4 \to E$, $5 \to L$, $6 \to H$, $7 \to F$, $8 \to J$.

6.4. Eno od preimenovanj je: $9 \to I$, $10 \to G$, $11 \to J$, $12 \to E$, $13 \to M$, $14 \to A$, $15 \to B$, $16 \to C$, $17 \to D$, $18 \to L$, $19 \to F$, $20 \to K$, $21 \to H$.

6.5. Množico treh točk grafa C_3 poskusimo razbiti v dve podmnožici, tako da noben par točk v isti podmnožici ni povezan. V vsakem primeru sta v eni podmnožici vsaj dve točki. Ker je v C_3 vsaka točka soseda vsake druge, ne moreta biti v isti podmnožici niti dve točki. Razbitje ni mogoče: C_3 ni dvodelen.

6.6. Imenujmo točke cikla C_7 kar po vrsti: 1,2,3,4,5,6,7, tako da ga določa obhod 12345671.

Bodi V_1 množica, v katero smo dali točko 1. Ker je 2 soseda 1, mora biti v množici V_2. Ker je 3 soseda 2, mora biti v V_1. Po isti logiki ležita 4 in 6 v V_2, 5 in 7 pa v V_1. Zato je $V_1 = \{ 1,3,5,7 \}$, $V_2 = \{ 2,4,6 \}$.

To pa je že protislovje, ker sta 1 in 7 v isti množici, čeprav sta sosednji. Cikel C_7 torej ni dvodelen. Na podoben način bi lahko dokazali, da noben lih cikel ni dvodelen.

6.9. Seveda nista! Graf (1) na sliki 6.1 vsebuje trikotnik, ki ni dvodelen. Graf (4) pa vsebuje cikel C_5, ki prav tako ni dvodelen.

6.13. Dvodelni so: (1) (vsebuje samo cikle C_4, C_6, C_8, C_{10}, C_{12}), (3) (njegovi edini cikli so C_4 in C_6) in (6) (ima le cikle: C_4, C_6 in C_8). Prav tako je dvodelen graf (5), saj lahko razbijemo množico njegovih točk v podmnožici:

$V_1 = \{ A,C,J,P,G,L,N,E \}$ in $V_2 = \{ B,H,I,K,D,O,M,F \}$

tako, da sta povezani kvečjemu dve točki iz različnih podmnožic.

Niso dvodelni: (2) (vsebuje trikotnike C_3), (4) (vsebuje C_5) in (7) (vsebuje C_3).

6.14. Vse poti P_n so dvodelne: ker nimajo ciklov, tudi lihih ciklov nimajo. Cikli C_n so dvodelni le, če je $n = 2k$ (sodo število). Od polnih grafov K_n sta dvodelna le K_1 in K_2, vsi drugi vsebujejo trikotnik.

6.18. Seveda prihajajo v poštev le polni dvodelni grafi $K_{a,b}$, kjer je $a + b = n$. Iz neenačbe $0 \leq (a - b)^2$ oziroma $4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$ dobimo $ab \leq (a + b)^2/4 = n^2/4$. Produkt ab torej ne more biti večji od $n^2/4$. Če je n sodo število: $n = 2k$, je torej $ab \leq k^2$ in vidimo, da je $K_{k,k}$ graf z največ povezavami. Če pa je število n liho: $n = 2k + 1$, število $n^2/4 = (4k^2 + 4k + 1)/4 = k^2 + k + (1/4)$ ni celo, zato produkt ab ne more biti večji od $(n^2 - 1)/4 = k^2 + k = k(k + 1)$; vidimo da je zdaj $K_{k+1,k}$ graf z največ povezavami.

7.3. Regularni grafi stopnje dva na dvanajstih točkah so: C_{12}, (C_9, C_3), (C_8, C_4), (C_7, C_5), (C_6, C_6), (C_6, C_3, C_3), (C_5, C_4, C_3), (C_4, C_4, C_4), (C_3, C_3, C_3, C_3).

Tu pomeni na primer (C_9, C_3) graf, ki sestoji iz dveh komponent, od katerih je prva cikel C_9, druga pa cikel C_3.

Regularnih grafov stopnje 2 na 20 točkah je kar 49. Na toliko načinov namreč lahko zapišemo število 20 kot vsoto celih števil, večjih od 2.

7.4. Na sliki 10.9 sta najmanjša neizomorfna kubična grafa z istim številom točk.

Slika 10.9

Grafa nista izomorfna, ker (1) vsebuje trikotnike, (2) pa ne.

7.5. Kubični graf na 11 točkah bi imel liho število lihih točk. To pa je v nasprotju s posledico 7.7.

7.8. Števili m in n morata biti enaki. V $K_{m,n}$ je m točk stopnje n in n točk stopnje m. Graf $K_{m,n}$ je torej regularen natanko tedaj, ko je $m = n$.

7.9. Naj bo G poljuben regularen, dvodelen graf stopnje d z dvodelnim razbitjem V_1, V_2. Naj V_1 vsebuje m točk, V_2 pa n točk. Tedaj iz množice V_1 izhaja md povezav, iz množice V_2 pa nd povezav. Obakrat dobimo vse povezave grafa. Zato je $md = nd$ in $m = n$. Tako smo dokazali, da ima poljuben regularen, dvodelen graf sodo mnogo točk.

7.10. Edino drevo stopnje 0 je K_1. Edino drevo stopnje 1 je K_2. Zaradi trditve 4.5 ne more obstajati nobeno regularno drevo stopnje $d > 1$.

7.11. Seveda je, saj je stopnja katerekoli njegove točke $n-1$.

7.12. (a) Kolo W_n smo dobil iz cikla C_n in vrha. Ko smo vse točke cikla C_n spojili z vrhom, je stopnja vsake točke cikla poskočila od 2 na 3. Isto stopnjo mora imeti vrh, če naj bo graf regularen. To pa je mogoče samo, če je $C_n = C_3$. Torej je $W_3 = K_4$ edino kolo , ki je regularen graf.
(b) Nobeno kolo ni dvodelen graf, saj očitno vsebuje trikotnike.

7.13. W_n ima $n+1$ točk (n točk cikla in vrh) in $2n$ povezav (n povezav cikla C_n in še n povezav, ki točke cikla povezujejo z vrhom).

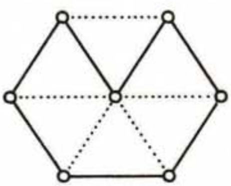
Vse točke , ki so se prvotno nahajale v ciklu C_n , imajo v W_n stopnjo 3, vrh pa ima stopnjo n.

7.14. Vse prizme T_n so regularni grafi stopnje 3. Če je n lih, T_n vsebuje lih cikel C_n in zato ni dvodelni graf. Če je n sod, je T_n dvodelni graf, o čemer se lahko bralec prepriča sam. T_n ima $2n$ točk in $3n$ povezav.

7.15. Vse antiprizme A_n so regularni grafi stopnje 4. Nobena antiprizma ni dvodelni graf, saj vsaka vsebuje trikotnike. A_n ima $2n$ točk (točke dveh ciklov C_n) in $4n$ povezav (po n povezav na vsakem od obeh ciklov in $2n$ povezav , ki točke prvega cikla povezujejo s točkami drugega).

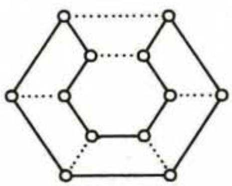
7.16. Dolžina najkrajšega cikla v W_n je 3. Dolžina najkrajšega cikla v T_n je 4 (edina izjema je T_3, kjer je ta dolžina enaka 3). V A_n je dolžina najkrajšega cikla 3.

Dolžina najdaljšega cikla v W_n je $n+1$. Slika 10.10 nam pokaže, kako v W_6 poiščemo C_7.



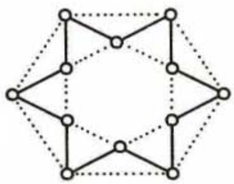
C_7 v W_6

Slika 10.10



C_{12} v T_6

Slika 10.11



C_{12} v A_6

Slika 10.12

Grafu, ki vsebuje cikel enake dolžine, kot je število njegovih točk, pravimo **Hamiltonov** graf.

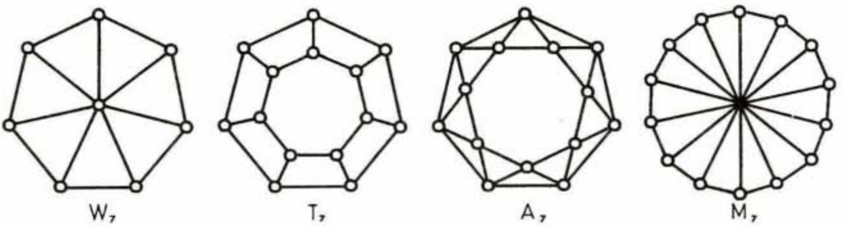
Slika 10.11 prikazuje, da T_6 vsebuje cikel C_{12}. Na splošno T_n vsebuje C_{2n}.

Tudi A_n vsebuje najdaljši cikel C_{2n}. Poseben primer C_{12} v A_6 prikazuje slika 10.12.

Vsi grafi W_n, T_n in A_n so torej Hamiltonovi.

7.17. Vsi grafi M_n so regularni stopnje 3. Če je n sod, dobimo iz polovice cikla C_{2n} in iz enega 'premera', cikel lihe dolžine n+1 in zato M_n ne more biti dvodelen. Dvodelen pa je vsak M_n z lihim n. Graf M_n ima 2n točk in 3n povezav. Na splošno je dolžina najkrajšega cikla v M_n enaka 4. Izjema je M_2, kjer je najkrajši cikel trikotnik. Dolžina najdaljšega cikla v M_n je 2n, zato je M_n Hamiltonov graf.

7.18. Iskane grafe prikazuje slika 10.13.



Slika 10.13

7.20. Kolo W_n je (n,3)-polregularni graf.

7.21. Ker imajo vsa drevesa točko stopnje 1 (glej trditev 4.5), se moramo omejiti na n = 1 in iskati polregularna drevesa oblike (m,1).

Naj bo v drevesu x točk stopnje m in y točk stopnje 1. Število vseh točk bo zato x+y. Število povezav lahko izrazimo takole: (mx + y)/2. Tako smo dobili enačbi

$$mx + y = 2 \cdot 1984$$
$$x + y = 1985$$

Če drugo enačbo odštejemo od prve, dobimo $mx - x = 1983$, od tod pa

$$m = 1 + 1983/x$$

Ker je x naravno število in m prav tako , bomo dobili vse rešitve, če bomo v izraz za m vstavili namesto x zapored vse delitelje števila 1983. Ker je $1983 = 3 \cdot 661$, so vsi možni njegovi delitelji le tile: 1, 3, 661, 1983.

Vse rešitve so zbrane v razpredelnici

x	1	3	661	1983
m	1984	662	4	2
y	1984	1982	1324	2

Iz nje med drugim razberemo, da obstaja polregularno (662,1)-drevo s tremi točkami stopnje 662 in s 1982 točkami stopnje 1.

7.22. Označimo iskano število z x. Število vseh točk drevesa je zato n+x, število vseh povezav pa n+x-1.

Izračunajmo število povezav še drugače, po formuli (3.1): $(4n + x)/2$. Oboje izenačimo in dobimo enačbo $n + x - 1 = (4n + x)/2$, katere rešitev je $x = 2n + 2$.

7.23. Najprej bomo pokazali, da je komplement polregularnega grafa polregularen. Bodi N število točk (m,n)-polregularnega grafa. Če ima neka točka stopnjo d, ima v komplementu stopnjo $N - d - 1$. Od tod sledi, da ima komplement (m,n)-polregularnega grafa le točke s stopnjami N-1-m in N-1-n. Komplement (m,n)-polregularnega grafa je tako (N-1-n,N-1-m)-polregularen. Ker je vsak m-regularni graf (m,m)-polregularen, je tudi komplement m-regularnega grafa (N-1-m,N-1-m)-polregularen oziroma (N-1-m)-regularen.

8.2. Polni usmerjeni graf na n točkah ima n^2 povezav.

8.5. Graf na sliki 10.14 je hkrati komplementaren in nasproten samemu sebi.

Slika 10.14

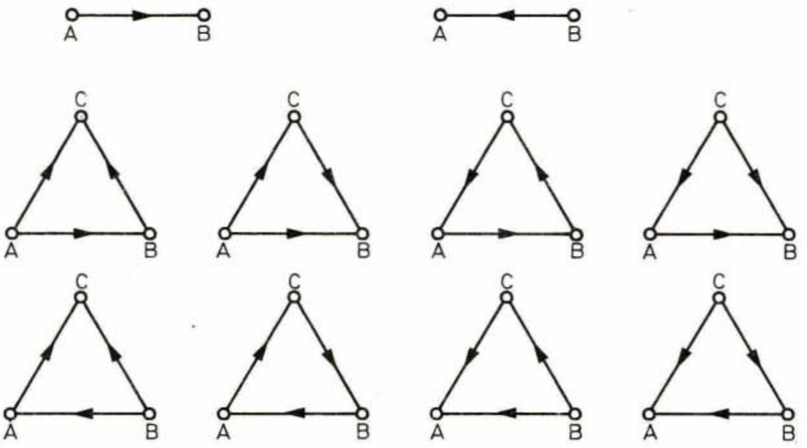
Slika 10.15

8.8. Iskani graf prikazuje slika 10.15.

8.10. Slika 10.16(1) prikazuje oba turnirja z dvema udeležencema, slika 10.16(2) pa vseh 8 turnirjev s tremi udeleženci.

(1)

(2)



Slika 10.16

8.11. Za vsako od šestih povezav imamo dve možni smeri. Skupno je zato $2^6 = 64$ turnirjev s štirimi udeleženci. V splošnem je pri n udeležencih $n(n-1)/2$ partij in $2^{n(n-1)/2}$ turnirjev.

8.12. Stopnje točk so: $d^+(A) = d^+(C) = 3$, $d^+(B) = 2$, $d^+(D) = d^+(E) = 1$, $d^-(A) = d^-(C) = 1$, $d^-(B) = 2$, $d^-(D) = d^-(E) = 3$, $d^+(F) = 3$, $d^+(G) = d^+(H) = d^+(J) = 2$, $d^+(I) = 1$, $d^-(F) = 1$, $d^-(G) = d^-(H) = d^-(J) = 2$, $d^-(I) = 3$ in lestvici $(3,3,2,1,1)$, $(3,2,2,2,1)$.

8.13. Vsota vseh števil je enaka številu povezav, teh pá je $n(n-1)/2$.

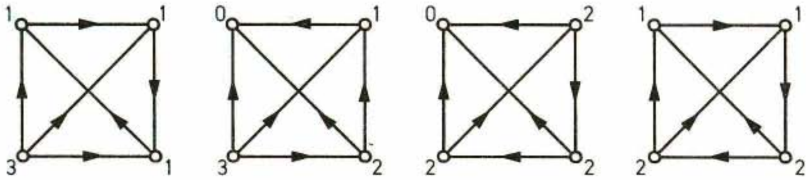
Na lestvici je lahko največje število $n-1$; doseženo je le takrat, ko prvouvrščeni premaga vse ostale udeležence. Na lestvici ne moreta biti dve ničli, ker sta tudi zadnjeuvrščena igrala med seboj in eden med njima je moral zmagati.

8.14. Z dvema udeležencema je turnir en sam: v njem je eden zmagovalec, drugi premaganec.

Obstajata dva neizomorfna turnirja s tremi udeleženci. Prvi je usmerjeni cikel $\vec{C}_3$. Predstavlja nam položaj, ko en udeleženec premaga drugega, drugi tretjega in tretji prvega. Drugi turnir s tremi udeleženci, imamo takrat, ko je en udeleženec premagal drugega in tretjega, drugi pa premagal tretjega.

Za $n = 4$ je možnosti več. Da ne prezremo katere, si pomagamo z lestvico. Edine možne lestvice so $(3,1,1,1)$, $(3,2,1,0)$, $(2,2,2,0)$ in

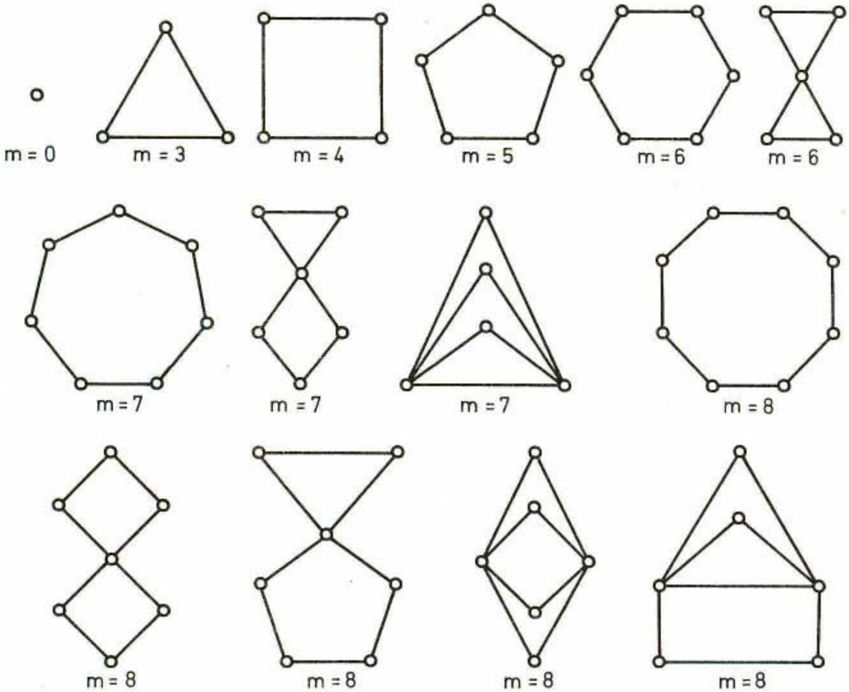
(2,2,1,1). Vsaki ustreza en sam turnir, zato so štirje neizomorfni turnirji štirih udeležencev. (Glej sliko 10.17.) Številke ob točkah pomenijo število zmag.



Slika 10.17

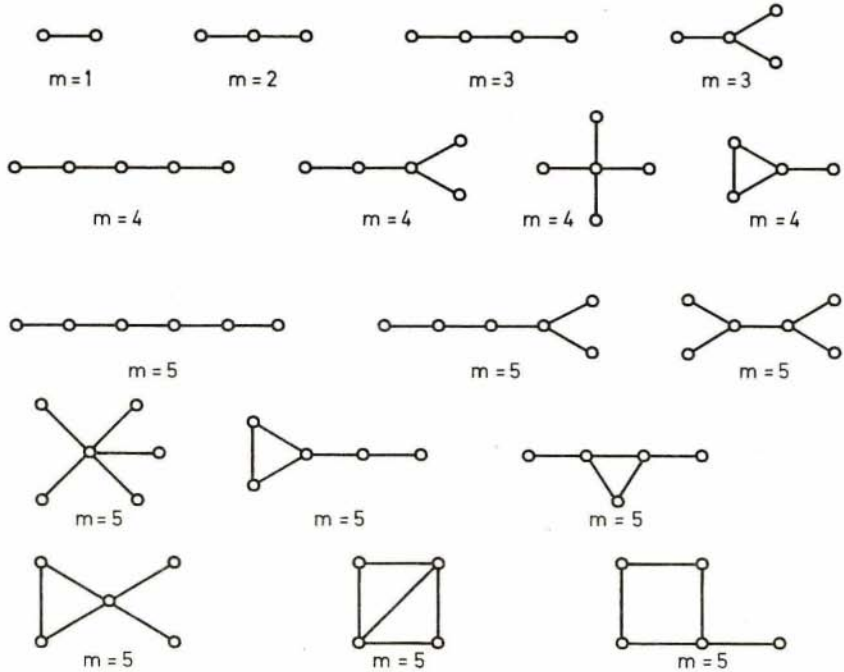
8.15. Turnirja na sliki 8.10 imata več Hamiltonovih poti. N.pr.: AEBCD, ADEBC, FHGJI, HIGFJ, JIGFH.

9.2. Slika 10.18 prikazuje vse povezane grafe z največ osmimi povezavami in samimi sodimi stopnjami.



Slika 10.18

9.3. Slika 10.19 prikazuje vse povezane grafe z največ petimi povezavami, katerih točke nimajo samih sodih stopenj.



Slika 10.19

9.4. Vsak graf vaje 9.2 ima Eulerjeve obhode.

9.5. Noben graf vaje 9.3 nima Eulerjevega obhoda. Nekateri imajo Eulerjeve sprehode.

9.7. Stopnja vsake točke polnega grafa K_n je n-1. Če naj graf premore Eulerjev obhod, mora biti n-1 sodo število in n liho število.

9.9. Ko izločimo zahtevane domine, nam ostane polni graf na točkah 1,2,3,4,5 in 6 , torej K_6. Ta ne premore Eulerjevega obhoda; glej prejšnjo vajo 9.7.

9.10. Graf A_n premore Eulerjev obhod, saj je regularni graf stopnje 4. Vsi grafi W_n, T_n in M_n vsebujejo točke stopnje 3, zato nimajo Eulerjevega obhoda.

SKLEPNA BESEDA

Zdaj, ko smo pri koncu, lahko pogledamo, kaj vse bi morali še vedeti o grafih. V knjižici so zbrane res najosnovnejše lastnosti grafov. Bralca, ki bi se želel z grafi podrobneje ukvarjati, moramo opozoriti, da je danes ta matematična veja že zelo bogata in so ji posvečene cele revije, ki prinašajo vsak mesec nove rezultate. V slovenščini o grafih še ni kaj dosti napisanega. In vendar moramo omeniti nekaj avtorjev in revij. O grafih je prvi pisal **Jože Vrabec** leta 1967 v Obzorniku za matematiko in fiziko. Presek že več let prinaša krajše prispevke o njih. Grafe najdemo tudi v zabavnih rubrikah drugih časnikov.

V srbohrvaščini obstaja dober učbenik iz teorije grafov. To je knjiga **Teorija grafova i njene primene,** ki jo je napisal **D. Cvetković.** Tam lahko najdemo bogat spisek knjig v drugih jezikih. Največ del je seveda v angleščini.

Upajmo, da bomo v slovenščini kmalu dobili bolj izčrpno knjigo o grafih, ki bo vsebovala gradivo, ki ga v tej knjigi ni. To so na primer barvanja grafov, operacije med grafi, ravninski grafi, odnos med grupami in grafi in podobno.

Avtorja sva prepričana, da teorija grafov še vedno pridobiva veljavo in bo v prihodnosti tudi pri nas vedno več njenih uporabnikov. Zato bo šele praksa ustalila njeno izrazje. Nekaj novih izrazov predlagava v tej knjižici. V veliko pomoč nama je bil prof. **Jože Vrabec** z nasveti in s skrbnim pregledom knjižice. Za vestno delo se mu najlepše zahvaljujeva. Posebej se mu zahvaljujeva, ker je pomagal zakrpati nekaj lukenj v dokazih in ker je izpilil več nepreglednih mest. Bralec je verjetno opazil, da se v knjižici pojavljajo sorazmerno pogosto določne oblike (npr. povezani graf, regularni graf, itd.). K tej odločitvi je pripomogla lektorica. Za njen trud se ji najlepše zahvaljujeva.

Upava, da bo tale knjižica doživela še kakšno izdajo. Zato hvaležno sprejemava vse pripombe, ki bi jo utegnile izboljšati.

Avtorja

STVARNO KAZALO